现代数学
·专著版·

胡克不等式及其应用

田景峰 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

内容提要

胡克不等式是Hölder不等式的精美改进，由于它克服了Hölder不等式在使用时的缺陷，被美国《数学评论》称之为一个“杰出的、非凡的、新的不等式”。正如Hölder不等式是数学各个领域的重要基石一样，胡克不等式也扮演着同样的角色。近年来关于胡克不等式的研究又有了新的进展，本书的目的就是介绍胡克不等式的近期发展概况，这其中包括反向胡克不等式及其性质、胡克不等式及反向胡克不等式的推广及应用等一系列最新的研究成果，并对已有的成果进行系统的总结，从而使该理论进一步系统化，为进一步深化胡克不等式的研究奠定基础。

责任编辑 顾素萍
责任校对 鄢春梅
版式设计 韩闻锦
封面设计 罗 π

ISBN 978-7-307-11988-8

定价:20.00元

现代数学

胡克不等式及其应用

田景峰 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

胡克不等式及其应用/田景峰著.—武汉：武汉大学出版社,2013.10
现代数学.专著版
ISBN 978-7-307-11988-8

Ⅰ.胡…　Ⅱ.田…　Ⅲ.不等式—研究　Ⅳ.O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 252083 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:鄢春梅　　版式设计:韩闻锦

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:7　字数:125 千字　插页:1
版次:2013 年 10 月第 1 版　2013 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-11988-8　定价:20.00 元

作者简介

田景峰，河北省安新县人。华北电力大学教师。主要从事解析不等式、模糊数学、不确定统计学习理论的研究。主持或参与多项省部级自然科学基金课题研究。在《Information Sciences》、《Fuzzy Optimization and Decision Making》、《Mathematical Inequalities and Applications》等知名国际期刊上发表学术论文30余篇，其中SCI收录14篇。荣获河北省优秀教学成果三等奖、保定市大中专院校青年教师说课比赛一等奖、华北电力大学青年教师教学基本功大赛一等奖、保定市青年科技奖等荣誉称号。

前言

不等式在数学的各个领域都起着非常重要的作用，而且在工程技术中也是一个必不可少的基本工具. 事实上，自从 20 世纪以来，不等式就一直是一个非常活跃而又有吸引力的研究领域，特别是现在不等式的研究空前活跃，研究的深度和广度都在迅速扩大[15].

经典的 Hölder 不等式是数学家 Hölder[20] 于 1889 年给出的如下形式的不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$（当 $0 < p < 1$ 时，上式中不等号反向，且 $a_k > 0$, $b_k > 0$）. 事实上，Roger[21] 比 Hölder 早一年得到上式，但习惯上人们一直将上式称为 Hölder 不等式.

众所周知，Hölder 不等式是数学很多领域的重要基石，是深入解决问题的桥梁. 自从 Hölder 给出这个不等式以来，对它的研究就没有中断过. 著名数学家 Hardy 等在其名著《不等式》中再三强调 Hölder 不等式“极为重要”和“到处都要用到”，这个不等式和 Minkowski 不等式、算术平均与几何平均不等式构成了该文献中前面 6 章的主题，占了全书一半以上的篇幅[15]. 一百多年来，出现了大量的关于这个不等式的改进、推广以及应用的文献.

尽管 Hölder 不等式在数学的很多领域有着重要的应用，但是有些问题用 Hölder 不等式估计时往往得不到较为精确的刻画. 例如，设

$$a_{2k-1} = b_{2k} = 1,\ a_{2k} = b_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, N,\ n = 2N,$$

显然 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$，而此时 Hölder 不等式的右端却是 N，与 0 相差甚远！

基于此，我国数学家胡克[24] 于 1981 年在《中国科学》上给出了一个新的不等式，这个不等式的出现克服了Hölder不等式在使用时的缺陷，美国《数学评论》称之为“一个杰出的、非凡的、新的不等式”[15]．国际数学界将这个不等式命名为胡克不等式．经典的 Hölder 不等式在数学中起着基础性作用并且有着广泛的应用领域，作为 Hölder 不等式精美改进的胡克不等式在其中的某些领域也扮演着同样的角色．事实上，自从胡克给出该不等式以来，就出现了大量的关于该不等式的研究文献．

近几年来，对于胡克不等式的研究又有了新的进展．本书出版的目的除了系统地介绍国内外学者对胡克不等式的研究成果外，着重叙述作者本人的一系列研究工作．

本书的内容安排如下：第 1 章预备知识，主要介绍一些常用的基础不等式以及 Hölder 不等式、Minkowski 不等式的推广；第 2 章胡克不等式，主要介绍胡克不等式及其若干推广；第 3 章反向胡克不等式，主要介绍反向胡克不等式及其若干推广；第 4 章几个重要的不等式构成函数的单调性性质，主要介绍胡克不等式、反向胡克不等式、Hölder 不等式以及 Minkowski 不等式构成函数的单调性性质；第 5 章应用，主要介绍胡克不等式及反向胡克不等式的一系列应用．

作者深切怀念已故的著名数学家胡克教授．为了本书的系统性和完整性，作者引用了胡克教授所著的《解析不等式的若干问题》的部分内容，在此，向他表示衷心的感谢．

本书的出版得到了中央高校基本科研业务费重点项目（编号：13ZD19）的资助，特此致谢．

作者忠心感谢武汉大学出版社编辑的精心工作，感谢我的家人对我的工作的支持．

由于作者才疏学浅，不妥与疏漏之处在所难免，恳请同仁及读者不吝赐教．

田景峰

2013 年 10 月

目 录

第 1 章 预备知识

为了方便读者，在这一章中，我们主要给出本书定理的证明中经常要用到的基本不等式以及 Hölder 不等式的重要推广.

1.1 几个常用的基础不等式

定理 1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 a_r, b_r $(r=1,2,\cdots,n)$ 为实数列，则

$$\left(\sum_{r=1}^{n} a_r b_r\right)^2 \le \left(\sum_{r=1}^{n} a_r^2\right)\left(\sum_{r=1}^{n} b_r^2\right). \tag{1.1}$$

定理 1.2 (Hölder 不等式) 设 $a_r, b_r \ge 0$ $(r=1,2,\cdots,n)$. 如果 $p \ge q > 1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{r=1}^{n} a_r b_r \le \left(\sum_{r=1}^{n} a_r^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{r=1}^{n} b_r^q\right)^{\frac{1}{q}}; \tag{1.2}$$

如果 $p>0$, $q<0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有反向不等式

$$\sum_{r=1}^{n} a_r b_r \ge \left(\sum_{r=1}^{n} a_r^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{r=1}^{n} b_r^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.3}$$

此时要求 $a_r, b_r > 0$.

相应的积分型 Hölder 不等式如下：

定理 1.3 设 $f(x), g(x) \geq 0$. 如果 $p \geq q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}; \tag{1.4}$$

如果 $p>0$, $q<0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则有反向不等式

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.5}$$

此时要求 $f(x), g(x) > 0$.

定理 1.4（Minkowski 不等式） 设 $a_r, b_r \geq 0$ $(r=1,2,\cdots,n)$. 若 $p>1$, 则

$$\left[\sum_{r=1}^{n}(a_r+b_r)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{r=1}^{n}a_r^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{r=1}^{n}b_r^p\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{1.6}$$

若 $0<p<1$, 则有反向不等式

$$\left[\sum_{r=1}^{n}(a_r+b_r)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{r=1}^{n}a_r^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{r=1}^{n}b_r^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

相应的积分型 Minkowski 不等式如下：

定理 1.5 设 $f(x), g(x) \geq 0$. 若 $p>1$, 则

$$\left[\int \big(f(x)+g(x)\big)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{1.8}$$

若 $0<p<1$, 则有反向不等式

$$\left[\int \big(f(x)+g(x)\big)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

定理 1.6（Dresher 不等式） 设 $a_i, b_i \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 若 $p>1>r>0$, 则

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r}\right]^{\frac{1}{p-r}} \le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^r}\right)^{\frac{1}{p-r}} + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}. \tag{1.10}$$

定理 1.7（Jensen 不等式） 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $a_i>0$, 且 $t_r(\boldsymbol{a})=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$ $(r\neq 0)$, 则对于 $0<r<s$, $r<s<0$ 或 $s<0<r$ 有

$$t_s(\boldsymbol{a})<t_r(\boldsymbol{a}). \tag{1.11}$$

定理 1.8[19] 如果 $x>-1$, $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$, 则有

$$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x. \tag{1.12}$$

当 $0<\alpha<1$ 时, 上述不等式反向.

定理 1.9[22] 如果 $x_i\ge 0$, $\lambda_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, $0<p\le 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1-p}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)^p. \tag{1.13}$$

当 $p\ge 1$ 或者 $p<0$ 时, 上述不等式反向.

定理 1.10[19] 设 $X,Y\ge 0$. 如果 $0\le\alpha\le 1$, 则有

$$X^\alpha Y^{1-\alpha}\le \alpha X+(1-\alpha)Y. \tag{1.14}$$

当 $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$ 时, 上述不等式反向.

1.2 Hölder 不等式及 Minkowski 不等式的推广

这一节我们将给出 Hölder 不等式及 Minkowski 不等式的几个重要的、常用的推广.

首先, 给出 Hölder 不等式的如下推广：

定理 1.11[38] 设 $A_{ij}\ge 0$ $(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$.

(1) 如果 β_j 是正数，并且 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\beta_j}\ge 1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}A_{ij}\le\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ij}^{\beta_j}\right)^{\frac{1}{\beta_j}}. \tag{1.15}$$

(2) 如果 $\beta_1>0$，$\beta_j<0\ (j=2,3,\cdots,m)$，并且 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\beta_j}\le 1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}A_{ij}\ge\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ij}^{\beta_j}\right)^{\frac{1}{\beta_j}}. \tag{1.16}$$

(3) 如果 $\beta_j<0\ (j=1,2,\cdots,m)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}A_{ij}\ge\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ij}^{\beta_j}\right)^{\frac{1}{\beta_j}}. \tag{1.17}$$

定理 1.12[34] 设 $a_{rj}>0\ (r=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$，$\lambda_1\ne 0$，$\lambda_j<0\ (j=2,3,\cdots,m)$，并且 $\tau=\max\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j},1\right\}$，则有

$$\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{rj}\ge n^{1-\tau}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n}a_{rj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}. \tag{1.18}$$

证 (1) 当 $\lambda_1<0$ 时，显然 $\tau=1$. 此时不等式 (1.18) 就是不等式 (1.17).

(2) 当 $\lambda_1>0$ 并且 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}\ge 1$时，记 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}=t\ \ (t\ge 1)$，则有 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{t\lambda_j}=1$. 由不等式 (1.16) 可知

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{rj}\right)^2&=\sum_{s=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m}a_{si}\right)\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{rj}\\&\ge\sum_{s=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m}a_{si}\right)\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n}a_{rj}^{t\lambda_j}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]\end{aligned}$$

$$
=\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(a_{s1}^{t\lambda_1}\sum_{r=1}^{n}a_{r1}^{t\lambda_1}\right)^{\frac{1}{t\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{t\lambda_j}}\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}\left(a_{s1}^{t\lambda_1}\sum_{r=1}^{n}a_{rj}^{t\lambda_j}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]\right.
$$

$$
\left.\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}\left(a_{sj}^{t\lambda_j}\sum_{r=1}^{n}a_{r1}^{t\lambda_1}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]\right\}. \tag{1.19}
$$

进而根据

$$
\left(\frac{1}{t\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{t\lambda_j}\right)+\frac{1}{t\lambda_2}+\frac{1}{t\lambda_3}+\cdots+\frac{1}{t\lambda_m}+\frac{1}{t\lambda_2}+\frac{1}{t\lambda_3}+\cdots+\frac{1}{t\lambda_m}=1,
$$

对不等式(1.19)的右端利用(1.16)可得

$$
\left(\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{rj}\right)^2\geq\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{t\lambda_1}a_{r1}^{t\lambda_1}\right)^{\frac{1}{t\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{t\lambda_j}}
$$

$$
\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{t\lambda_1}a_{rj}^{t\lambda_j}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]\left[\prod_{j=2}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{sj}^{t\lambda_j}a_{r1}^{t\lambda_1}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]. \tag{1.20}
$$

此外，利用定理 1.9，我们有

$$
\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{t\lambda_1}a_{r1}^{t\lambda_1}\right)^{\frac{1}{t\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{t\lambda_j}}\left[\prod_{j=2}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{t\lambda_1}a_{rj}^{t\lambda_j}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]
$$

$$
\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{sj}^{t\lambda_j}a_{r1}^{t\lambda_1}\right)^{\frac{1}{t\lambda_j}}\right]
$$

$$
\geq(n^2)^{(1-t)\left(\frac{1}{t\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{t\lambda_j}\right)}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{\lambda_1}a_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{\lambda_j}}
$$

$$
\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}(n^2)^{\frac{1-t}{t\lambda_j}}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{\lambda_1}a_{rj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]
$$

$$
\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}(n^2)^{\frac{1-t}{t\lambda_j}}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{sj}^{\lambda_j}a_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]
$$

$$
=(n^2)^{1-t}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{\lambda_1}a_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{\lambda_j}}
$$

$$
\cdot\left[\prod_{j=2}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{s1}^{\lambda_1}a_{rj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]\left[\prod_{j=2}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{sj}^{\lambda_j}a_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= n^{2-2t}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{2}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{2}{\lambda_j}} \\
&\quad \cdot\left\{\prod_{j=2}^{m}\left[\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{s1}^{\lambda_1}a_{rj}^{\lambda_j}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{sj}^{\lambda_j}a_{r1}^{\lambda_1}\right)\right]^{\frac{1}{\lambda_j}}\right\} \\
&= n^{2-2t}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{2}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{2}{\lambda_j}} \\
&\quad \cdot\left\{\prod_{j=2}^{m}\left[\left(\sum_{s=1}^{n} a_{s1}^{\lambda_1}\right)\left(\sum_{r=1}^{n} a_{rj}^{\lambda_j}\right)\left(\sum_{s=1}^{n} a_{sj}^{\lambda_j}\right)\left(\sum_{r=1}^{n} a_{r1}^{\lambda_1}\right)\right]^{\frac{1}{\lambda_j}}\right\} \\
&= n^{2-2t}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{rj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{2}{\lambda_j}}. \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

联合不等式(1.20)和(1.21)立刻可得我们要证的不等式(1.18).

(3) 当 $\lambda_1>0$ 并且 $\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}\le 1$ 时，很显然不等式(1.18)就是不等式(1.16). □

定理 1.13[40] 设 $a_{rj}>0$ $(r=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$，$\lambda_j>0$ $(j=1,2,\cdots,m)$，并且 $\gamma=\min\left\{\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j},1\right\}$，则有

$$
\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{rj}\le n^{1-\gamma}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{rj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}. \qquad (1.22)
$$

证 定理 1.13 的证明类似于定理 1.12 的证明，在此省略. □

接下来，我们给出 Minkowski 不等式的推广：

定理 1.14[29] 设 $f_i(x)\ge 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 若 $p>1$，则

$$
\left[\int\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)^{p}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\le\sum_{i=1}^{n}\left(\int f_i^{p}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad (1.23)
$$

若 $0<p<1$，则有反向不等式

$$\left[\int\Big(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\Big)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\int f_i^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.24}$$

上述推广的 Minkowski 不等式的伴随形式不等式如下：

定理 1.15[29] 设 $f_i(x)\geq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 若 $p>1$, 则

$$\int\Big(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\Big)^p\mathrm{d}x\geq\sum_{i=1}^{n}\int f_i^p(x)\mathrm{d}x; \tag{1.25}$$

若 $0<p<1$, 则有反向不等式

$$\int\Big(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\Big)^p\mathrm{d}x\leq\sum_{i=1}^{n}\int f_i^p(x)\mathrm{d}x. \tag{1.26}$$

第 2 章 胡克不等式及其推广

在这一章中，我们主要介绍胡克不等式以及它的三种推广，这三种推广包括：条件的弱化、维数的增加以及该不等式的复数形式．此外，由这些推广我们还得到了推广的 Hölder 不等式的一些有意义的改进．

2.1 胡克不等式

众所周知，Hölder 不等式是数学很多领域的重要基石，是深入解决问题的桥梁．自从 Hölder 给出这个不等式以来，对它的研究就没有中断过．著名数学家 Hardy 等在其名著 [22] 中再三强调 Hölder 不等式“极为重要”和“到处都要用到”，这个不等式和 Minkowski 不等式、算术平均与几何平均不等式构成了文献中前面 6 章的主题，占了全书一半以上的篇幅．一百多年来，出现了大量的关于这个不等式的改进、推广以及应用的文献．

尽管 Hölder 不等式在数学的很多领域有着重要的应用，但是有些问题用 Hölder 不等式估计时往往得不到较为精确的刻画．例如，设

$$a_{2k-1}=b_{2k}=0,\ a_{2k}=b_{2k-1}=1,\quad k=1,2,\cdots,N,\ n=2N,$$

显然 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=0$，而此时 Hölder 不等式(1.2)的右端为 N，与 0 相差较大．

基于此，我国数学家胡克于 1981 年在《中国科学》上给出了 Hölder 不等式的一个如下的新的改进．在此，我们称之为**胡克不等式**．

定理 2.1[1]　设 $A_r, B_r \geq 0,\ 1-e_r+e_s \geq 0\ (r,s=1,2,\cdots)$. 如果 $q \geq p > 0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有

$$\sum_r A_rB_r \leq \left(\sum_r A_r^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(\sum_r A_r^p\right)\left(\sum_r B_r^q\right)\right]^2\right.$$
$$\left.-\left[\left(\sum_r A_r^pe_r\right)\left(\sum_r B_r^q\right)-\left(\sum_r A_r^p\right)\left(\sum_r B_r^qe_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}. \tag{2.1}$$

证　下面分两种情况对这个定理进行证明.

(1) 当 $q>p>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时, 经过一些简单的运算, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_r A_rB_r\sum_s A_sB_s(1-e_r+e_s)\\
&\quad=\sum_s\sum_r A_rB_rA_sB_s-\sum_s\sum_r A_rB_rA_sB_se_r+\sum_s\sum_r A_rB_rA_sB_se_s\\
&\quad=\left(\sum_r A_rB_r\right)^2.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

考虑到推广的 Hölder 不等式(1.15), 有

$$\begin{aligned}
&\sum_r A_rB_r\sum_s A_sB_s(1-e_r+e_s)\\
&\quad=\sum_r A_rB_r\sum_s A_sB_s(1-e_r+e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\\
&\quad\leq\sum_r A_rB_r\left(\sum_s A_s^p(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_s B_s^q(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad=\sum_r\left[\left(\sum_s A_r^pA_s^p(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_s A_r^pB_s^q(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left(\sum_s B_r^qA_s^p(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}\tag{2.3}$$

由于 $\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q}=1$, 进而在不等式 (2.3) 的右端利用不等式 (1.15), 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_r A_r B_r \sum_s A_s B_s (1-e_r+e_s) \\
&\le \left(\sum_r\sum_s A_r^p A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_r\sum_s A_r^p B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \cdot \left(\sum_r\sum_s B_r^q A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_r A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left[\left(\sum_r A_r^p \sum_{s=1}^n B_s^q - \sum_r A_r^p e_r \sum_{s=1}^n B_s^q + \sum_r A_r^p \sum_s B_s^q e_s\right)\right. \\
&\quad \left.\cdot \left(\sum_r B_r^q \sum_s A_s^p - \sum_r B_r^q e_r \sum_s A_s^p + \sum_r B_r^q \sum_s A_s^p e_s\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_r A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left\{\left[\left(\sum_r A_r^p\right)\left(\sum_r B_r^q\right)\right]^2\right. \\
&\quad \left. - \left[\left(\sum_r A_r^p e_r\right)\left(\sum_r B_r^q\right) - \left(\sum_r A_r^p\right)\left(\sum_r B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

联合不等式(2.2)和(2.4), 立刻得到要证的不等式(2.1).

(2) 当 $p=q$ 时定理是显然的. □

评注 2.1 接下来我们看看本章开始时举的特例:

$$a_{2k-1}=b_{2k}=0,\ a_{2k}=b_{2k-1}=1, \quad k=1,2,\cdots,N,\ n=2N.$$

如果在(2.1)中取 $e_{2k-1}=0,\ e_{2k}=1,\ k=1,2,\cdots,N$, 则由(2.1)可得 $0\le 0$. 可见, 不等式(2.1)较 Hölder 不等式刻画这个问题更为精细.

由定理 2.1 和定理 1.8, 很容易得到 Hölder 不等式的如下改进形式:

推论 2.1 设 $A_r>0,\ B_r>0\ (r=1,2,\cdots),\ 1-e_r+e_s\ge 0\ (r,s=1,2,\cdots)$, 并且 $q\ge p>0,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有

$$\sum_r A_r B_r \le \left(\sum_r A_r^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_r B_r^q\right)^{\frac{1}{q}} \left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{\sum_r B_r^q e_r}{\sum_r B_r^q}-\frac{\sum_r A_r^p e_r}{\sum_r A_r^p}\right)^2\right]. \qquad (2.5)$$

按照类似的证明思路，我们可以有如下的积分型胡克不等式：

定理 2.2[1]　设 $f(x),g(x)\geq 0$，$f^p(x),g^q(x)$ 是可积函数，$1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $q\geq p>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Bigg[&\left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\int g^q(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&-\Bigg(\int f^p(x)e(x)\mathrm{d}x\int g^q(x)\mathrm{d}x\\&-\int f^p(x)\mathrm{d}x\int g^q(x)e(x)\mathrm{d}x\Bigg)^2\Bigg]^{\frac{1}{2q}}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

由定理 2.2 易得如下形式的 Hölder 不等式的改进：

推论 2.2　设 $f(x),g(x)\geq 0$，$f^p(x),g^q(x)$ 是可积函数，$1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $q\geq p>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq&\left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{\int f^p(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int f^p(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right].\end{aligned}\tag{2.7}$$

2.2　胡克不等式的第一种推广

胡克不等式有很多有意义的推广，在此，我们先来介绍它的第一种推广，也就是限制条件弱化的推广. 此外，由该推广我们很容易得到经典的 Hölder 不等式的推广和一种有意义的改进.

定理 2.3[41]　设 $A_r\geq 0$，$B_r>0$ $(r=1,2,\cdots,n)$，$1-e_r+e_s\geq 0$ $(r,s=1,$

$2, \cdots, n)$, 并且设 $p \geq q > 0$, $\rho = \min\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, 1\right\}$, 则有

$$\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \leq n^{1-\rho}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2\right.$$
$$\left.-\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right) - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}. \tag{2.8}$$

证 我们分两种情况对这个定理进行证明.

(1) 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ 时, 由不等式(1.13)可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s (1 - e_r + e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s (1 - e_r + e_s)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_r + \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_s\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

考虑到推广的 Hölder 不等式(1.15), 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&\quad \le \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \left(\sum_{s=1}^{n} A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^{n} B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_r^p A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{s=1}^{n} A_r^p B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\qquad \left.\cdot \left(\sum_{s=1}^{n} B_r^q A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

由于 $\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q}\ge 1$, 进而在不等式(2.10)的右端利用不等式(1.15)可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&\quad \le \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^p A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^p B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^q A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{s=1}^{n} B_s^q - \sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r \sum_{s=1}^{n} B_s^q + \sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{s=1}^{n} B_s^q e_s\right)\right. \\
&\qquad \left.\cdot \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{s=1}^{n} A_s^p - \sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r \sum_{s=1}^{n} A_s^p + \sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{s=1}^{n} A_s^p e_s\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2\right. \\
&\qquad \left. - \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right) - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

联合不等式(2.9)和(2.11)立刻得到要证的不等式(2.8).

(2) 当 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<1$ 时, 设 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=t\ (0<t<1)$, 则 $\dfrac{1}{pt}+\dfrac{1}{qt}=1$. 一方面,经过一些简单的运算, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s) \\
&\quad = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s - \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_r \\
&\qquad + \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_s \\
&\quad = \left(\sum_{k=1}^{n} A_k B_k\right)^2. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

另一方面，由 Hölder 不等式和(1.15)，有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s) \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s)^{\frac{1}{pt}+\frac{1}{qt}} \\
&\quad \le \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}}\right. \\
&\qquad \left.\cdot \left(\sum_{s=1}^{n} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\right] \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}}\right. \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} B_r^{qt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}} \\
&\qquad \left.\cdot \left(\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\right] \\
&\quad \le \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^{qt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

此外，考虑到 $0<t<1$，利用定理 1.9，可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_r^{pt}A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}}\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}B_r^{qt}A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_r^{pt}B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\\
&\qquad\le\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{(1-t)\left(\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}\right)}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_r^{p}A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1-t}{qt}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}B_r^{q}A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1-t}{qt}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_r^{p}B_s^{q}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad=\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{1-t}\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_r^{p}A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}B_r^{q}A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_r^{p}B_s^{q}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad=n^{2-2t}\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}B_r^{q}\sum_{s=1}^{n}A_s^{p}-\sum_{r=1}^{n}B_r^{q}e_r\sum_{s=1}^{n}A_s^{p}+\sum_{r=1}^{n}B_r^{q}\sum_{s=1}^{n}A_s^{p}e_s\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}\sum_{s=1}^{n}B_s^{q}-\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}e_r\sum_{s=1}^{n}B_s^{q}+\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}\sum_{s=1}^{n}B_s^{q}e_s\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad=n^{2\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}\left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}B_r^{q}\right)\right]^2\right.\\
&\qquad\left.-\left[\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n}B_r^{q}\right)-\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^{p}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}B_r^{q}e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

联合不等式(2.12), (2.13)和(2.14), 立刻得到要证的不等式(2.8). □

利用定理 2.3 和定理 1.8, 很容易得到 Hölder 不等式的如下改进形式:

推论 2.3 设 $A_r, B_r > 0\ (r=1,2,\cdots,n)$, $1-e_r+e_s\geq 0\ (r,s=1,2,\cdots,n)$, 并且 $p\geq q>0$, $\rho=\min\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\right\}$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}A_rB_r\leq & n^{1-\rho}\left(\sum_{r=1}^{n}A_r^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{r=1}^{n}B_r^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ & \cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}B_r^qe_r}{\sum\limits_{k=1}^{n}B_r^q}-\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}A_r^pe_r}{\sum\limits_{r=1}^{n}A_r^p}\right)^2\right].\end{aligned}\tag{2.15}$$

接下来我们给出积分型胡克不等式的第一种推广.

定理2.4[41] 设$f(x),g(x),e(x)$是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数, 并且$f(x)\geq 0$, $g(x)>0$, $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $p\geq q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1$, 则

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\\ &\leq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^2\right.\\ &\quad\left.-\left(\int_a^b f^p(x)e(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2q}}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

证 对于任意的正整数 n, 我们对区间 $[a,b]$ 进行 n 等分:

$$a<a+\frac{b-a}{n}<\cdots<a+\frac{b-a}{n}k<\cdots<a+\frac{b-a}{n}(n-1)<b,$$

$$x_k=a+\frac{b-a}{n}k,\ \Delta x_k=\frac{b-a}{n},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

由定理 2.3 可得

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k) \le n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\right)\right]^2\right.$$
$$-\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)e(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\right)\right.$$
$$\left.\left.-\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)e(x_k)\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}, \tag{2.17}$$

也就是

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n} \le (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left\{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\right.$$
$$-\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}. \tag{2.18}$$

因为 $f(x), g(x), e(x)$ 在 $[a,b]$ 上是正的黎曼可积函数，于是 $f^p(x), g^q(x)$, $g^q(x)e(x)$ 在 $[a,b]$ 也是可积的. 对不等式(2.18)两端令 $n\to\infty$，则有不等式(2.16)成立. □

由定理 2.4 易得如下形式的 Hölder 不等式的改进：

推论 2.4　设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并且 $f(x)\ge 0$, $g(x)>0$，$1-e(x)+e(y)\ge 0$. 如果 $p\ge q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le 1$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{\int_a^b f^p(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right]. \tag{2.19}$$

2.3 胡克不等式的第二种推广

这一节我们将给出胡克不等式在维数增加条件下的推广.

定理 2.5[32] 设 $A_{nj}\ge 0$, $\sum\limits_n A_{nj}^{\lambda_j}<\infty\ (j=1,2,\cdots,k)$, $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_k>0$, $\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{1}{\lambda_j}=1$, 并且 $1-e_n+e_m\ge 0$, $\sum\limits_n|e_n|<\infty$. 如果 k 是偶数, 则有

$$
\begin{aligned}
\sum_n\prod_{j=1}^{k}A_{nj}\le\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}\Bigg\{&\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j-1}}-\frac{1}{\lambda_{2j}}}\\
&\cdot\Bigg[\left(\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\right)\right)^2\\
&-\Bigg(\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_n\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\right)\\
&-\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}e_n\right)\Bigg)^2\Bigg]^{\frac{1}{2\lambda_{2j}}}\Bigg\};
\end{aligned}\tag{2.20}
$$

如果 k 是奇数, 则有

$$
\begin{aligned}
\sum_n\prod_{j=1}^{k}A_{nj}\le&\left(\sum_n A_{nk}^{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{\lambda_k}}\cdot\prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}}\Bigg\{\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j-1}}-\frac{1}{\lambda_{2j}}}\\
&\cdot\Bigg[\left(\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\right)\right)^2\\
&-\Bigg(\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_n\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\right)\\
&-\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}e_n\right)\Bigg)^2\Bigg]^{\frac{1}{2\lambda_{2j}}}\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{2.21}
$$

相应的积分形式如下：

定理 2.6[32]　设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$, $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} = 1$, 并且设 E 是可测集, $F_j(x)$ 是非负可测函数, $\int_E F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x < \infty$, $e(x)$ 是可测函数, $1 - e(x) + e(y) \geq 0$. 如果 k 是偶数, 则有

$$\begin{aligned}\int_E \prod_{j=1}^{k} F_j(x)\mathrm{d}x \leq \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \Bigg\{ &\left(\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{\lambda_{2j-1}} - \frac{1}{\lambda_{2j}}} \\ &\cdot \Bigg[\left(\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x \int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)\mathrm{d}x \right)^2 \\ &- \left(\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)e(x)\mathrm{d}x \int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)\mathrm{d}x \right. \\ &\left. - \int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x \int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)e(x)\mathrm{d}x \right)^2 \Bigg]^{\frac{1}{2\lambda_{2j}}} \Bigg\}; \quad (2.22)\end{aligned}$$

如果 k 是奇数, 则有

$$\begin{aligned}\int_E \prod_{j=1}^{k} F_j(x)\mathrm{d}x \leq &\left(\int_E F_k^{\lambda_k}(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{\lambda_k}} \\ &\cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \Bigg\{ \left(\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{\lambda_{2j-1}} - \frac{1}{\lambda_{2j}}} \\ &\cdot \Bigg[\left(\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x \int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)\mathrm{d}x \right)^2 \\ &- \left(\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)e(x)\mathrm{d}x \int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)\mathrm{d}x \right. \\ &\left. - \int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x \int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)e(x)\mathrm{d}x \right)^2 \Bigg]^{\frac{1}{2\lambda_{2j}}} \Bigg\}. \quad (2.23)\end{aligned}$$

证　这里仅仅给出离散形式的证明, 读者可以类似地给出积分形式的证明. 经过一些简单的运算, 我们有

$$\sum_n\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\sum_m\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)(1-e_n+e_m)$$
$$=\sum_n\sum_m\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)-\sum_n\sum_m\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)e_n$$
$$+\sum_n\sum_m\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)e_m$$
$$=\left(\sum_n\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)^2. \tag{2.24}$$

这里我们分两种情况分别给出这个定理的证明.

(1) 当 k 是偶数时, 由不等式(1.15), 有

$$\sum_n\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\sum_m\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)(1-e_n+e_m)$$
$$=\sum_n\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\sum_m\prod_{i=1}^k A_{mi}(1-e_n+e_m)^{\frac{1}{\lambda_i}}$$
$$\le\sum_n\left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left[\prod_{i=1}^k\left(\sum_m A_{mi}^{\lambda_i}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_i}}\right]$$
$$=\sum_n\left\{\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}\left[\left(A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j-1}}-\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right.\right.$$
$$\cdot\left(A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\sum_m A_{m(2j)}^{\lambda_{2j}}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}$$
$$\left.\left.\cdot\left(A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right]\right\}. \tag{2.25}$$

考虑到

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_2}+\left(\frac{1}{\lambda_3}-\frac{1}{\lambda_4}\right)+\frac{1}{\lambda_4}+\frac{1}{\lambda_4}+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{\lambda_{k-1}}-\frac{1}{\lambda_k}\right)+\frac{1}{\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_k}=1,$$

从而对不等式(2.25)的右边利用(1.15), 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_n\left(\prod_{j=1}^{k}A_{nj}\right)\sum_m\left(\prod_{i=1}^{k}A_{mi}\right)(1-e_n+e_m)\\
&\le\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}\left[\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j-1}}-\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right.\\
&\quad\cdot\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\sum_m A_{m(2j)}^{\lambda_{2j}}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}\\
&\quad\left.\cdot\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}(1-e_n+e_m)\right)^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right]\\
&=\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}\left\{\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)^{\frac{2}{\lambda_{2j-1}}-\frac{2}{\lambda_{2j}}}\right.\\
&\quad\cdot\left[\left(\sum_n\sum_m A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}A_{m(2j)}^{\lambda_{2j}}(1-e_n+e_m)\right)\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\left(\sum_n\sum_m A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}(1-e_n+e_m)\right)\right]^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right\}\\
&=\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}\left\{\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)^{\frac{2}{\lambda_{2j-1}}-\frac{2}{\lambda_{2j}}}\left[\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\sum_m A_{m(2j)}^{\lambda_{2j}}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.-\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_n\sum_m A_{m(2j)}^{\lambda_{2j}}+\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\sum_m A_{m(2j)}^{\lambda_{2j}}e_m\right)\\
&\quad\cdot\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}-\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}e_n\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right.\\
&\quad\left.\left.\left.+\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\sum_m A_{m(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_m\right)\right]^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right\}\\
&=\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}\left\{\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)^{\frac{2}{\lambda_{2j-1}}-\frac{2}{\lambda_{2j}}}\left[\left(\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\right)\right)^2\right.\right.\\
&\quad-\left(\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_n\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}\right)\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\left(\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}\right)\left(\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}e_n\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{\lambda_{2j}}}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

由不等式(2.24)和(2.26)立刻得到我们要证的不等式(2.20).

(2) 当 k 是奇数时，采用与(1)类似的方法易得不等式(2.21). □

利用上述两个定理，我们得到一般化的 Hölder 不等式的如下两种改进形式：

推论 2.5 设 $A_{nj} \geq 0$，$0 \neq \sum_n A_{nj}^{\lambda_j} < \infty \ (j = 1, 2, \cdots, k)$，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$，$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} = 1$，并且 $1 - e_n + e_m \geq 0$，$\sum_n |e_n| < \infty$，则有

$$\sum_n \prod_{j=1}^{k} A_{nj} \leq \left[\prod_{j=1}^{k} \left(\sum_n A_{nj}^{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{\rho(k)} \left[1 - \frac{1}{2\lambda_{2j}} \left(\frac{\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}} e_n}{\sum_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}} - \frac{\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}} e_n}{\sum_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}} \right)^2 \right] \right\}. \tag{2.27}$$

其中 $\rho(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{若 } k \text{ 是偶数}, \\ \frac{k-1}{2}, & \text{若 } k \text{ 是奇数}. \end{cases}$

推论 2.6 设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$，$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} = 1$，并且设 E 是可测集，$F_j(x)$ 是非负可测函数，$0 \neq \int_E F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x < \infty$，$e(x)$ 是可测函数，$1 - e(x) + e(y) \geq 0$，则有

$$\int_E \prod_{j=1}^{k} F_j(x)\mathrm{d}x \leq \left[\prod_{j=1}^{k} \left(\int_E F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{\rho(k)} \left[1 - \frac{1}{2\lambda_{2j}} \left(\frac{\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_E F_{2j-1}^{\lambda_{2j-1}}(x)\mathrm{d}x} - \frac{\int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_E F_{2j}^{\lambda_{2j}}(x)\mathrm{d}x} \right)^2 \right] \right\}, \tag{2.28}$$

$$\text{其中}\quad \rho(k)=\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & \text{若 } k \text{ 是偶数},\\ \dfrac{k-1}{2}, & \text{若 } k \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

证　这里只给出推论 2.5 的证明. 推论 2.6 的证明类似. 由不等式(2.20)和(2.21), 有

$$\sum_n\prod_{j=1}^k A_{nj}\le\left[\prod_{j=1}^k\left(\sum_n A_{nj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]$$
$$\cdot\left\{\prod_{j=1}^{\rho(k)}\left[1-\left(\frac{\sum\limits_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_n}{\sum\limits_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}}-\frac{\sum\limits_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}e_n}{\sum\limits_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2\lambda_{2j}}}\right\}. \tag{2.29}$$

此外, 经过一些简单的运算, 可以得到

$$\left|\frac{\sum\limits_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}e_n}{\sum\limits_n A_{n(2j-1)}^{\lambda_{2j-1}}}-\frac{\sum\limits_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}e_n}{\sum\limits_n A_{n(2j)}^{\lambda_{2j}}}\right|<1. \tag{2.30}$$

进而, 由定理 1.8、不等式(2.29)和(2.30), 我们得到要证的不等式(2.27).

□

2.4　胡克不等式的第三种推广

在这一节中, 我们主要介绍胡克不等式的复数形式.

定理 2.7[13]　设 $a_k, b_k, c_k^{(i)}\ (k, i=1,2,\cdots)$ 为复数, e_k为实数. 设 $r, s>0$, $p, q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 记

$$(\boldsymbol{a}^r,\boldsymbol{b}^s)=\sum_{k=1}^n a_k^r\overline{b_k^s},\ \|\boldsymbol{a}\|_p=\sum_{k=1}^n|a_k|^p,\ \|\boldsymbol{a}\|_2=\|\boldsymbol{a}\|,\ (|\boldsymbol{x}|^p,\boldsymbol{e})=\sum_{k=1}^n|x_k|^pe_k,$$

如果 $1-e_k+e_m\geq 0$，并且 $\|\boldsymbol{c}^{(i)}\|=1$，则有

$$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|\leq \|\boldsymbol{a}\|_p^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{b}\|_q^{\frac{1}{q}}\left(1-\theta_{m,p}^{(2)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})\right)^{\alpha(p)},\tag{2.31}$$

其中，$\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=\dfrac{\left|(\boldsymbol{a}^{\frac{p}{2}},\boldsymbol{x})\right|}{\|\boldsymbol{a}\|_p^{\frac{1}{2}}}$，$\lambda_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e})=\dfrac{(|\boldsymbol{a}|^p,\boldsymbol{e})}{\|\boldsymbol{a}\|_p}-\dfrac{(|\boldsymbol{b}|^q,\boldsymbol{e})}{\|\boldsymbol{b}\|_q}$，$\gamma_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=s_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-s_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，$\alpha(p)=\min\left\{\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{q}\right\}$，

$$\begin{aligned}\theta_{m,p}^{(2)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})=&\gamma_p^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(m)})+\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_p^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(i)})\prod_{k=i+1}^{m}\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^{(k)})\beta_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(k)})\\&+\frac{1}{2}\lambda_p^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e})\prod_{k=1}^{m}\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^{(k)})\beta_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(k)}).\end{aligned}$$

当 $m=1$ 时，上式右边 $\sum$ 项为零. 当 $p\neq 2$ 时，$a_k,b_k\geq 0$；当 $p=2$ 时，a_k,b_k 可为复数.

特别地，若$\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\beta_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<1$，则有

$$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|\leq \|\boldsymbol{a}\|_p^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{b}\|_q^{\frac{1}{q}}\left[1-\frac{1}{1-\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\beta_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\left(\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\beta_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\right)^2\right]^{\alpha(p)}.\tag{2.32}$$

相应的积分形式如下：

定理2.8[13] 设$f\in L^p(\alpha,\beta)$，$g\in L^q(\alpha,\beta)$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$，$\|c^{(i)}\|=1$，则

$$|(f,g)|\leq \|f\|_p^{\frac{1}{p}}\|g\|_q^{\frac{1}{q}}\left(1-\theta_{m,p}^{(2)}(f,g,c,e)\right)^{\alpha(p)},\tag{2.33}$$

其中，$\alpha(p)=\min\left\{\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{q}\right\}$，$(f^r,g^s)=\displaystyle\int_\alpha^\beta f^r(x)\overline{g^s(x)}\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f|^p\mathrm{d}x=\|f\|_p$，

$$\begin{aligned}\theta_{m,p}^{(2)}(f,g,c,e)=&\gamma_p^2(f,g,c^{(m)})+\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_p^2(f,g,c^{(i)})\prod_{k=i+1}^{m}\beta_p(f,c^{(k)})\beta_q(g,c^{(k)})\\&+\frac{1}{2}\lambda_p^2(f,g,e)\prod_{k=1}^{m}\beta_p(f,c^{(k)})\beta_q(g,c^{(k)}).\end{aligned}$$

当 $m=1$ 时，此式右边 $\sum$ 项为零. 当 $p\neq 2$ 时，$f,g\geq 0$；当 $p=2$ 时，f,g 为复数.

特别地，若 $\beta_p(f,c)\beta_q(g,c)<1$，则有

$$\left|(f,g)\right| \le \|f\|_p^{\frac{1}{p}}\|g\|_q^{\frac{1}{q}}\left[1-\frac{1}{1-\beta_p(f,c)\beta_q(g,c)}\left(\beta_p(f,c)-\beta_q(g,c)\right)^2\right]^{\alpha(p)}. \tag{2.34}$$

在此我们只给出上述离散形式的证明，相应的积分形式的证明，读者可以类似地给出．要证明定理 2.7，首先证明其 $p=2$ 时的情形．下面用数学归纳法来证明．

当 $m=1$ 时，由胡克不等式以及定理 1.8 可知

$$\begin{aligned}\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right| &\le \|\boldsymbol{a}\|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{b}\|^{\frac{1}{2}}\left(1-\lambda_2^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e})\right)^{\frac{1}{4}}\\ &\le \|\boldsymbol{a}\|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{b}\|^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4}\lambda_2^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e})\right).\end{aligned} \tag{2.35}$$

由 Gram 不等式可知

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\end{vmatrix} \ge 0. \tag{2.36}$$

如果 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})=1$，则(2.36)可变形为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})-\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\left|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\right|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\right|^2\\ &\quad+2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\ge 0.\end{aligned} \tag{2.37}$$

结合(2.35)可知

$$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\right| \le \left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\right|\left(\|\boldsymbol{a}\|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{b}\|^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{4}\lambda_2^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e})\right). \tag{2.38}$$

进而由(2.37)和(2.38)可得

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 \le&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})-\left(\|\boldsymbol{a}\|^{\frac{1}{2}}|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|-\|\boldsymbol{b}\|^{\frac{1}{2}}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})|\right)^2\\ &-\frac{1}{2}\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\right|\|\boldsymbol{a}\|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{b}\|^{\frac{1}{2}}\lambda_2^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}).\end{aligned} \tag{2.39}$$

(2.39)就是定理 2.7 的(2.31)当 $p=2,\ m=1$ 时的情形．现设 $p=2,\ m=k$ 时定理成立，即有

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| &\le \left(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\theta_{k,2}^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \left(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\theta_{k,2}^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})\right).\end{aligned} \tag{2.40}$$

由(2.36)和(2.40)可知

$$\begin{aligned}
\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2 &\le (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\left|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right|^2 - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right|^2 \\
&\quad + 2\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right|\left|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right| \\
&\le (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - \left(\|\boldsymbol{a}\|^{\frac{1}{2}}\left|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right| - \|b\|^{\frac{1}{2}}\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right|\right)^2 \\
&\quad - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|)^{\frac{1}{2}}\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^{(k+1)})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{(k+1)})\right|\cdot\theta_{k,2}^{(2)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}) \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\left(1-\theta_{k+1,2}^{(2)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})\right).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

于是当 $p=2$ 时定理 2.7 的(2.31)成立.

下面证明 $p\neq 2$ 时的情形. 不妨设 $p>q>1$. 已知 $a_k,b_k>0$, 由 Hölder 不等式可知

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k^{\frac{q}{p}} b_k^{1-\frac{q}{p}} \le \left(\boldsymbol{a}^{\frac{p}{2}},\boldsymbol{b}^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}\|\boldsymbol{b}\|_q^{1-\frac{2}{p}}. \tag{2.42}$$

进而由定理 2.7 中 $p=2$ 时的情形可得

$$\left(\boldsymbol{a}^{\frac{q}{2}},\boldsymbol{b}^{\frac{p}{2}}\right)^2 \le \|\boldsymbol{a}\|_p\|\boldsymbol{b}\|_q\left(1-\theta_{m,p}^{(2)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})\right). \tag{2.43}$$

将(2.43)代入(2.42)即得定理的(2.31)的结论.

由假设 $x=\beta_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\beta_q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<1$, 知 $x^n\to 0\ (n\to\infty)$. 因此, 在(2.31)中取 $c^{(i)}=c$ 即得(2.32)的结论.

第3章 反向胡克不等式及其推广

在这一章中，我们将主要介绍反向胡克不等式及其三种推广形式. 此外，由这些推广我们还将得到推广的反向 Hölder 不等式的一些有意义的改进.

3.1 反向胡克不等式[32]

这一节我们将首先给出离散型反向胡克不等式的理想形式.

定理 3.1 设 $A_r \geq 0$, $B_r > 0$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$, 并且 $1 - e_r + e_s \geq 0$ $(r, s = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $q < 0$, $p > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \geq &\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2\right. \\ &- \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right. \\ &\left.\left.- \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

证 经过一些简单的运算，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s) \\
&\quad = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s - \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_r + \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_s \\
&\quad = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \right)^2 .
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

由推广的 Hölder 不等式(1.15), 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s) \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \\
&\quad \geq \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \left(\sum_{s=1}^{n} A_s^p (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^{n} B_s^q (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_r^p A_s^p (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{s=1}^{n} A_r^p B_s^q (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} B_r^q A_s^p (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

由于 $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$, 进而在不等式(3.3)的右端利用不等式(1.15)可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s) \\
&\quad \geq \left(\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_r^p A_s^p (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_r^p B_s^q (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} B_r^q A_s^p (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p \right)^{\frac{2}{p} - \frac{2}{q}} \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{s=1}^{n} B_s^q - \sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r \sum_{s=1}^{n} B_s^q + \sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{s=1}^{n} B_s^q e_s \right) \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{s=1}^{n} A_s^p - \sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r \sum_{s=1}^{n} A_s^p + \sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{s=1}^{n} A_s^p e_s \right) \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2 - \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right) - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.4}$$

联合不等式(3.2)和(3.4), 立刻得到要证的不等式(3.1). □

由定理 3.1 和定理 1.8, 很容易得到 Hölder 不等式的如下改进形式:

推论 3.1　设 $A_r > 0$, $B_r > 0$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$, 并且 $1 - e_r + e_s \geq 0$ $(r, s = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $q < 0$, $p > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \geq \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{1}{q}} \left[1 - \frac{1}{2q}\left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{n} B_r^q e_r}{\sum\limits_{k=1}^{n} B_r^q} - \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} A_r^p e_r}{\sum\limits_{r=1}^{n} A_r^p}\right)^2\right]. \tag{3.5}$$

接下来我们给出积分型胡克不等式的反向形式.

定理 3.2　设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x), g(x) > 0$, $1 - e(x) + e(y) \geq 0$. 如果 $q < 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&\geq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\int_a^b f^p(x)e(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2q}}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

证　对于任意的正整数 n, 对区间 $[a,b]$ 进行 n 等分:

$$a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{b-a}{n}k < \cdots < a + \frac{b-a}{n}(n-1) < b,$$

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k,\ \Delta x_k = \frac{b-a}{n},\quad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

由定理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Bigg\{ & \left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\right)\right]^2 \\ & - \left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)e(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\right)\right. \\ & \left.- \left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)e(x_k)\right)\right]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2q}},\end{aligned} \tag{3.7}$$

也就是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Bigg\{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right]^2 \\ &\quad - \left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right. \\ &\quad \left.- \left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2q}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因为 $f(x), g(x), e(x)$ 在 $[a,b]$ 上是正的黎曼可积函数，于是 $f^p(x), g^q(x)$, $g^q(x)e(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的. 对不等式(3.8)两端令 $n\to\infty$，则有不等式(3.6)成立. □

由定理 3.2 易得如下形式的 Hölder 不等式的改进:

推论 3.2 设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并且 $f(x), g(x) > 0$, $1 - e(x) + e(y) \geq 0$. 如果 $q < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq & \left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \cdot\left[1 - \frac{1}{2q}\left(\frac{\int_a^b f^p(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x} - \frac{\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2　反向胡克不等式的第一种推广[36]

这一节我们将给出反向胡克不等式的条件弱化的推广.

定理 3.3　设 $A_r \geq 0,\ B_r > 0\ (r = 1, 2, \cdots, n)$，并且设 $1 - e_r + e_s \geq 0$ $(r, s = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $q < 0,\ p > 0,\ \rho = \max\left\{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}, 1\right\}$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \geq & n^{1-\rho}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2\right. \\ & \left.-\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)-\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

证　我们分两种情况对这个定理进行证明.

(1) 当 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1$ 时，经过一些简单的运算，有

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s) \\ &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s - \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_r + \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_s \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} A_k B_k\right)^2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由不等式(1.13)可得

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1 - e_r + e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\ &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s (1 - e_r + e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right. \\
&\quad \left. -\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_r + \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s e_s\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r B_r A_s B_s \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r\right)^2 .
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

考虑到推广的 Hölder 不等式(1.15), 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&\quad \ge \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \left(\sum_{s=1}^{n} A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^{n} B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_r^p A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right. \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} A_r^p B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} B_r^q A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

由于

$$
\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}+\frac{1}{q} \le 1,
$$

进而在不等式(3.13)的右端利用不等式(1.15) 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&\quad \geq \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^p A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^p B_s^q (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^q A_s^p (1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{s=1}^{n} B_s^q - \sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r \sum_{s=1}^{n} B_s^q + \sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{s=1}^{n} B_s^q e_s\right)\right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{s=1}^{n} A_s^p - \sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r \sum_{s=1}^{n} A_s^p + \sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{s=1}^{n} A_s^p e_s\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2\right. \\
&\qquad \left. - \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right) - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

联合不等式(3.12)和(3.14), 立刻得到要证的不等式(3.10).

(2) 当 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\geq 1$ 时, 设 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=t\ (t\geq 1)$, 则 $\dfrac{1}{pt}+\dfrac{1}{qt}=1$. 由 Hölder 不等式和(1.15), 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s) \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{s=1}^{n} A_s B_s (1-e_r+e_s)^{\frac{1}{pt}+\frac{1}{qt}} \\
&\quad \geq \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}} \left(\sum_{s=1}^{n} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\right] \\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}} \left(\sum_{s=1}^{n} B_r^{qt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}\right]
\end{aligned}
$$

$$\geq \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^{qt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}$$
$$\cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}}. \tag{3.15}$$

此外，考虑到 $t \geq 1$，利用定理 1.9 可得

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^{qt} A_s^{pt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{pt} B_s^{qt}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{qt}} \\
&\qquad \geq \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{(1-t)\left(\frac{1}{pt}-\frac{1}{qt}\right)} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{p} A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1-t}{qt}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^{q} A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1-t}{qt}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{p} B_s^{q}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad = \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(1-e_r+e_s)\right)^{1-t} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{p} A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_r^{q} A_s^{p}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_r^{p} B_s^{q}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad = n^{2-2t}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^{p}\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^{q}\sum_{s=1}^{n} A_s^{p} - \sum_{r=1}^{n} B_r^{q} e_r \sum_{s=1}^{n} A_s^{p} + \sum_{r=1}^{n} B_r^{q}\sum_{s=1}^{n} A_s^{p} e_s\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^{p}\sum_{s=1}^{n} B_s^{q} - \sum_{r=1}^{n} A_r^{p} e_r \sum_{s=1}^{n} B_s^{q} + \sum_{r=1}^{n} A_r^{p}\sum_{s=1}^{n} B_s^{q} e_s\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$= n^{2\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}\left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2\right.$$

$$\left.-\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)-\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (3.16)$$

联合不等式(3.11), (3.15)和(3.16), 立刻得到要证的不等式(3.10). □

由定理 3.3 和定理 1.8, 很容易得到 Hölder 不等式的如下改进形式:

推论 3.3　设 $A_r > 0$, $B_r > 0$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$, $1 - e_r + e_s \geq 0$ $(r, s = 1, 2, \cdots, n)$, 并且 $q < 0$, $p > 0$, $\rho = \max\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, 1\right\}$, 则有

$$\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \geq n^{1-\rho}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r}{\sum_{k=1}^{n} B_r^q}-\frac{\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r}{\sum_{r=1}^{n} A_r^p}\right)^2\right]. \quad (3.17)$$

接下来我们给出积分型胡克不等式的第二种推广.

定理 3.4　设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x), g(x) > 0$, $1 - e(x) + e(y) \geq 0$. 如果 $q < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, 则

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&\geq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^2\right.\\&\quad\left.-\left(\int_a^b f^p(x)e(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2q}}.\end{aligned} \quad (3.18)$$

证　对于任意的正整数 n, 对区间 $[a, b]$ 进行 n 等分:

$$a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{b-a}{n}k < \cdots < a + \frac{b-a}{n}(n-1) < b,$$

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k,\ \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

由定理 3.3 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\\&\quad \geq n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\right)\right]^2\right.\\&\qquad -\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)e(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\right)\right.\\&\qquad \left.\left.-\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)e(x_k)\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}},\end{aligned}\tag{3.19}$$

也就是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n}\\&\quad \geq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\&\qquad \cdot\left\{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\right.\\&\qquad -\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right.\\&\qquad \left.\left.-\left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

因为 $f(x), g(x), e(x)$ 在 $[a,b]$ 上是正的黎曼可积函数，于是 $f^p(x), g^q(x), g^q(x)e(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的. 对不等式(3.20)两端令 $n \to \infty$，则有不等式(3.18)成立. □

由定理 3.4 易得如下形式的 Hölder 不等式的改进:

推论 3.4 设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并且 $f(x), g(x) > 0$，$1 - e(x) + e(y) \geq 0$. 如果 $q < 0$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{\int_a^b f^p(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right]. \tag{3.21}$$

3.3　反向胡克不等式的第二种推广[32]

这一节我们将给出反向胡克不等式在维数增加情况下的推广.

定理 3.5　设 $A_{rj}>0\ (r=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$, $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}=1$, 并且 $1-e_r+e_s\geq 0\ (s=1,2,\cdots,n)$. 如果 $\lambda_1>0$, $\lambda_j<0\ (j=2,3,\cdots,m)$, 则

$$\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}A_{rj}\geq\left(\sum_{r=1}^{n}A_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{\lambda_j}}\prod_{j=2}^{m}\left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n}A_{r1}^{\lambda_1}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}A_{rj}^{\lambda_j}\right)\right]^2\right.$$
$$-\left[\left(\sum_{r=1}^{n}A_{r1}^{\lambda_1}e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n}A_{rj}^{\lambda_j}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\left(\sum_{r=1}^{n}A_{r1}^{\lambda_1}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}A_{rj}^{\lambda_j}e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2\lambda_j}}. \tag{3.22}$$

相应的积分形式如下:

定理 3.6　设 $F_j(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 并且 $\int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x$ 存在, 设 $1-e(x)+e(y)\geq 0$, $\int_a^b e(x)\mathrm{d}x<\infty$, 并且 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}=1$. 如果 $\lambda_1>0$, $\lambda_j<0\ (j=2,3,\cdots,m)$, 则有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(x)\mathrm{d}x \geq & \left(\int_a^b F_1^{\lambda_1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\lambda_j}} \\
& \cdot \prod_{j=2}^m \left[\left(\int_a^b F_1^{\lambda_1}(x)\mathrm{d}x \int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x\right)^2\right. \\
& - \left(\int_a^b F_1^{\lambda_1}(x)e(x)\mathrm{d}x \int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x\right. \\
& \left.\left. - \int_a^b F_1^{\lambda_1}(x)\mathrm{d}x \int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)e(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2\lambda_j}}.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

证 这里只给出定理 3.5 的证明. 定理 3.6 的证明类似. 经过一些简单的运算, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \sum_n \left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right) \sum_m \left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)(1-e_n+e_m) \\
& = \sum_n \sum_m \left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right) \\
& \quad - \sum_n \sum_m \left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)e_n \\
& \quad + \sum_n \sum_m \left(\prod_{j=1}^k A_{nj}\right)\left(\prod_{i=1}^k A_{mi}\right)e_m \\
& = \left(\sum_n \prod_{j=1}^k A_{nj}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

由推广的 Hölder 不等式(1.15)可知

$$
\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^n \left(\prod_{i=1}^m A_{si}\right) \sum_{r=1}^n \left(\prod_{j=1}^m A_{rj}\right)(1-e_r+e_s) \\
& = \sum_{s=1}^n \left(\prod_{i=1}^m A_{si}\right) \sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m A_{rj}(1-e_r+e_s)^{\frac{1}{\lambda_j}} \\
& \geq \sum_{s=1}^n \left(\prod_{i=1}^m A_{si}\right) \left[\prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n A_{rj}^{\lambda_j}(1-e_r+e_s)\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{n} \left\{ \left(A_{s1}^{\lambda_1} \sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{\lambda_j}} \right. \\
&\quad \cdot \left[\prod_{j=2}^{m} \left(A_{s1}^{\lambda_1} \sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \\
&\quad \left. \cdot \left[\prod_{j=2}^{m} \left(A_{sj}^{\lambda_j} \sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

考虑到

$$
\left(\frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{\lambda_j}\right) + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots + \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots + \frac{1}{\lambda_m} = 1,
$$

在不等式(3.25)的右边应用不等式(1.15), 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m} A_{si} \right) \sum_{r=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{m} A_{rj} \right) (1 - e_r + e_s) \\
&\geq \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{s1}^{\lambda_1} A_{r1}^{\lambda_1} (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{\lambda_j}} \\
&\quad \cdot \left[\prod_{j=2}^{m} \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{s1}^{\lambda_1} A_{rj}^{\lambda_j} (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \\
&\quad \cdot \left[\prod_{j=2}^{m} \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{sj}^{\lambda_j} A_{r1}^{\lambda_1} (1 - e_r + e_s) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{2}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^{m} \frac{2}{\lambda_j}} \left\{ \prod_{j=2}^{m} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{s1}^{\lambda_1} A_{rj}^{\lambda_j} (1 - e_r + e_s) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{sj}^{\lambda_j} A_{r1}^{\lambda_1} (1 - e_r + e_s) \right) \right]^{\frac{1}{\lambda_j}} \right\} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{2}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^{m} \frac{2}{\lambda_j}} \left\{ \prod_{j=2}^{m} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{\lambda_1} \sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. - \sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{\lambda_1} \sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} e_r + \sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{\lambda_1} e_s \sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} \right) \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} A_{sj}^{\lambda_j} \sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} - \sum_{s=1}^{n} A_{sj}^{\lambda_j} \sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} e_r + \sum_{s=1}^{n} A_{sj}^{\lambda_j} e_s \sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda_j}} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1}\right)^{\frac{2}{\lambda_1}-\sum_{j=2}^{m}\frac{2}{\lambda_j}} \\
&\quad \cdot \left\{\prod_{j=2}^{m}\left[\left(\left(\sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1}\right)\left(\sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j}\right)\right)^2\right.\right. \\
&\quad - \left(\left(\sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1}\right)\left(\sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} e_r\right)\right. \\
&\quad \left.\left.\left. - \left(\sum_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{\lambda_j}}\right\}. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

进而由不等式(3.24)和(3.26)立刻得到我们要证的不等式(3.22). □

利用上述两个定理, 我们得到一般化的 Hölder 不等式的如下两个改进形式:

推论 3.5 设 $A_{rj} > 0\ (r = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, m)$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} = 1$, $\sum\limits_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} \neq 0$, 并且 $1 - e_r + e_s \geq 0\ (s = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_j < 0\ (j = 2, 3, \cdots, m)$, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} A_{rj} \geq &\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right] \\
&\cdot \left\{\prod_{j=2}^{m}\left[1 - \frac{1}{2\lambda_j}\left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1} e_r}{\sum\limits_{r=1}^{n} A_{r1}^{\lambda_1}} - \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j} e_r}{\sum\limits_{r=1}^{n} A_{rj}^{\lambda_j}}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

推论 3.6 设 $F_j(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的非负可积函数, 并且 $\int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x$ 存在且不等于 0, 设 $1 - e(x) + e(y) \geq 0$, $\int_a^b e(x)\mathrm{d}x < \infty$, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} = 1$. 如果 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_j < 0\ (j = 2, 3, \cdots, m)$, 则有

$$\int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(x)\mathrm{d}x \geq \left[\prod_{j=1}^m \left(\int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right] \cdot \left\{\prod_{j=2}^m \left[1 - \frac{1}{2\lambda_j}\left(\frac{\int_a^b F_1^{\lambda_1}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b F_1^{\lambda_1}(x)\mathrm{d}x} - \frac{\int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b F_j^{\lambda_j}(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right]\right\}. \tag{3.28}$$

3.4　反向胡克不等式的第三种推广

这一节我们将首先给出胡克得到的胡克不等式的一种反向形式，然后再给出作者本人得到的该反向形式的推广.

定理 3.7[14]　设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $a_k > 0$, $b_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 并且 $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, $1 - e_i + e_j \geq 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $q < 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\lambda = \max\left\{-1, \dfrac{1}{q}\right\}$, 则有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \geq (\boldsymbol{\alpha}^p, \boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}} (\boldsymbol{\beta}^q, \boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}} \left[1 - \left(\frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q, \boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^q, \boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q, \boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.29}$$

其中，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (1, 1, \cdots, 1)$, $(\boldsymbol{\alpha}^t, \boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^n a_k^t$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{e}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k e_k$.

证　设 $l = \dfrac{1}{p}$, $l' = -\dfrac{q}{p}$, 则 $l > 1$, $\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{l'} = 1$. 此外设 $\boldsymbol{\gamma} = (a_1^p b_1^p, a_2^p b_2^p, \cdots, a_n^p b_n^p)$, $\boldsymbol{\delta} = (b_1^{-p}, b_2^{-p}, \cdots, b_n^{-p})$. 在胡克不等式(2.1)中利用以下替换:

$$p \to l,\ q \to l',\ \boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\delta},$$

有

$$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \le (\boldsymbol{\gamma}^l,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{l'}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\gamma}^l,\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\gamma}^l,\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\gamma}^l,\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2l}}. \quad (3.30)$$

进而

$$(\boldsymbol{\alpha}^p,\boldsymbol{\varepsilon}) \le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{l'}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2l}}. \quad (3.31)$$

在不等式(3.31)两端开 p 次方根，有要证的不等式:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ge (\boldsymbol{\alpha}^p,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

□

定理 3.8[33] 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $a_k>0$, $b_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 并且 $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$, $1-e_i+e_j\ge 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 如果 $q<0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge 0$, $\rho=\max\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\right\}$, $\lambda=\max\left\{-1,\frac{1}{q}\right\}$, 则有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ge n^{1-\rho}(\boldsymbol{\alpha}^p,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}, \quad (3.33)$$

其中，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$, $\boldsymbol{\varepsilon}=(1,1,\cdots,1)$, $(\boldsymbol{\alpha}^t,\boldsymbol{\varepsilon})=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^t$, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_ke_k$.

证 (1) 当 $-1\le q<0$ 时，因为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge 0$，于是 $0<p\le 1$. 设 $l=\frac{1}{p}$, $l'=-\frac{q}{p}$, 则 $l\ge l'>0$. 此外，设 $\boldsymbol{\gamma}=(a_1^pb_1^p,a_2^pb_2^p,\cdots,a_n^pb_n^p)$, $\boldsymbol{\delta}=(b_1^{-p},b_2^{-p},\cdots,b_n^{-p})$. 当 $0<\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}<1$ 时，在(2.8)中利用以下替换:

$$p \to l,\ q \to l',\ \boldsymbol{\alpha} \to \gamma,\ \boldsymbol{\beta} \to \delta,$$

有

$$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \le n^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}}(\boldsymbol{\gamma}^{l},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{l'}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\gamma}^{l},\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\gamma}^{l},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\gamma}^{l},\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^{l'},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2l}}. \tag{3.34}$$

进而

$$(\boldsymbol{\alpha}^{p},\boldsymbol{\varepsilon}) \le n^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{l'}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2l}}. \tag{3.35}$$

现在在不等式(3.35)两端开 p 次方根，有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ge n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\boldsymbol{\alpha}^{p},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.36}$$

由于 $0<\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l'}<1$，从而 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>1$. 于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ge\, & n^{1-\max\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\right\}}(\boldsymbol{\alpha}^{p},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\\ & \cdot\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

当 $\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l'}\ge 1$ 时，有 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\le 1$. 类似地，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ge\, & (\boldsymbol{\alpha}^{p},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\\ & \cdot\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}\\ =\, & n^{1-\max\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\right\}}(\boldsymbol{\alpha}^{p},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\\ & \cdot\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{q},\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

(2) 当 $q<-1$ 时，采用与(1)类似的方法可得

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \geq n^{1-\max\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\right\}}(\boldsymbol{\alpha}^p,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2q}}. \tag{3.39}$$

于是得到要证的不等式(3.33). □

利用定理 3.8, 易得 Hölder 不等式的如下推广和改进:

推论 3.7[33] 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $a_k>0$, $b_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 并且$\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$, $1-e_i+e_j\geq 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 如果$q<0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 0$, $\rho=\max\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\right\}$, $\lambda=\max\left\{-1,\frac{1}{q}\right\}$, 则有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \geq n^{1-\rho}(\boldsymbol{\alpha}^p,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{q}}\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^q,\boldsymbol{\varepsilon})}\right)^2\right]. \tag{3.40}$$

特别地, 在(3.40)中, 如果取 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则由上述推论可得 Hölder 不等式的如下改进:

推论 3.8[33] 设 $a_k>0$, $b_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$, $1-e_i+e_j\geq 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, $q<0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 并且 $\lambda=\max\left\{-1,\frac{1}{q}\right\}$, 则有

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q e_k}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}-\frac{\sum\limits_{k=1}^n a_kb_ke_k}{\sum\limits_{k=1}^n a_kb_k}\right)^2\right]. \tag{3.41}$$

定理 3.9[33] 设 $f(x),g(x),e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x)>0$, $g(x)>0$, $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $q<0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$, $\lambda=\max\left\{-1,\frac{1}{q}\right\}$, 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)e(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}-\frac{\displaystyle\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.42}$$

证　对于任意的正整数 n, 将区间 $[a,b]$ n 等分:

$$a < a+\frac{b-a}{n} < \cdots < a+\frac{b-a}{n}k < \cdots < a+\frac{b-a}{n}(n-1) < b,$$

$$x_k = a+\frac{b-a}{n}k,\ \Delta x_k = \frac{b-a}{n},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

由定理 3.8, 我们得到以下不等式:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) \geq n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^n f^p(x_k)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n g^q(x_k)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)e(x_k)}{\displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)}-\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n g^q(x_k)e(x_k)}{\displaystyle\sum_{k=1}^n g^q(x_k)}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.43}$$

也就是

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n}$$
$$\geq (b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^n f^p(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n g^q(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}}{\displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n}}-\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n g^q(x_k)e(x_k)\frac{b-a}{n}}{\displaystyle\sum_{k=1}^n g^q(x_k)\frac{b-a}{n}}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.44}$$

因为 $f(x),g(x),e(x)$ 是正的黎曼可积函数，于是 $f^p(x),g^q(x),g^q(x)e(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的．在不等式(3.44)两端令 $n\to\infty$，于是得到要证的不等式(3.42). □

利用定理 3.9, 易得积分型 Hölder 不等式的如下推广和改进：

推论 3.9[33] 设 $f(x),g(x),e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并且 $f(x)>0$，$g(x)>0$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $q<0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\geq 1$，$\lambda=\max\Big\{-1,\dfrac{1}{q}\Big\}$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq &(b-a)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\cdot\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right],\end{aligned}\tag{3.45}$$

例 3.1[33] 在(3.45)中，取 $a=0$，$e(x)=\frac{1}{2}\cos\dfrac{2\pi x}{b}$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq\ & b^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_0^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\cdot\left[1-\frac{\lambda}{8}\left(\frac{\int_0^b f(x)g(x)\cos\frac{2\pi x}{b}\mathrm{d}x}{\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_0^b g^q(x)\cos\frac{2\pi x}{b}\mathrm{d}x}{\int_0^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right],\end{aligned}\tag{3.46}$$

其中 $\lambda=\max\Big\{-1,\dfrac{1}{q}\Big\}$.

特别地，在(3.45)中取 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，由推论 3.9，我们得到以下改进的 Hölder 不等式:

推论 3.10[33]　设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并且 $f(x)>0$，$g(x)>0$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $q<0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \cdot\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_a^b g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right], \tag{3.47}$$

其中 $\lambda=\max\left\{-1,\dfrac{1}{q}\right\}$.

采用和定理 3.8 类似的方法，我们得到胡克不等式的如下反向形式：

定理 3.10[33]　设 E 是可测集，$f(x), g(x)$ 是 E 上正的可测函数，并且 $\int_E f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$\int_E g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，$e(x)$ 是可测函数，$\int_E e(x)\mathrm{d}x<\infty$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $q<0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_E f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \cdot\left[1-\left(\frac{\int_E f(x)g(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_E g^q(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_E g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.48}$$

其中 $\lambda=\max\left\{-1,\dfrac{1}{q}\right\}$.

第4章 几个重要不等式构成的函数的单调性性质

在这一章中，我们介绍胡克不等式、反向胡克不等式、Hölder 不等式及 Minkowski 不等式构成的函数的单调性性质.

4.1 胡克不等式构成的函数的单调性

定理 4.1[13] 设 $A_r, B_r \geq 0$, $1 - e_r + e_k \geq 0$ $(r, k = 1, 2, \cdots)$, 以及 $p \geq q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 记

$$F(n) = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r\right)^2 - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p} - \frac{2}{q}} \left\{\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)\right]^2 - \left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right) - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{4.1}$$

则有

$$F(n) \geq F(n+1). \tag{4.2}$$

这个定理的积分形式如下:

定理 4.2[13] 设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数，并且

$f(x), g(x) \geq 0$, $1 - e(x) + e(y) \geq 0$. 如果 $p \geq q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 并且记

$$G(t) = \left(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \cdot \left[\left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x \int_a^t g^q(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^t f^p(x)e(x)\mathrm{d}x \int_a^t g^q(x)\mathrm{d}x - \int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x \int_a^t g^q(x)e(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.3}$$

则有

$$G(t_1) \geq G(t_2), \quad a \leq t_1 \leq t_2 \leq b. \tag{4.4}$$

证明可参考文献 [13].

注意：对于(4.1), 如果我们令 $n = 1$, 则有 $F(1) = 0$. 进而由定理4.1就可以得到离散型的胡克不等式. 类似地, 对于(4.4), 如果设 $t_1 = a$, $t_2 = b$, 利用定理 4.2 就可以得到积分型的胡克不等式.

4.2　反向胡克不等式构成的函数的单调性

定理 4.3[35]　设 $A_r \geq 0$, $B_r > 0$, $1 - e_r + e_k \geq 0$ $(r, k = 1, 2, \cdots)$ 及 $q < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 记

$$F(n) = \left(\sum_{r=1}^n A_r B_r\right)^2 - \left(\sum_{r=1}^n A_r^p\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \left\{\left[\left(\sum_{r=1}^n A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^n B_r^q\right)\right]^2 - \left[\left(\sum_{r=1}^n A_r^p e_r\right)\left(\sum_{r=1}^n B_r^q\right) - \left(\sum_{r=1}^n A_r^p\right)\left(\sum_{r=1}^n B_r^q e_r\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{4.5}$$

则有

$$F(n) \leq F(n+1). \tag{4.6}$$

这个定理的积分形式如下:

定理 4.4[35] 设 $f(x), g(x), e(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并且 $f(x)\ge 0$, $g(x)>0$, $1-e(x)+e(y)\ge 0$. 如果 $q<0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 并且记

$$\begin{aligned}G(t)=&\left(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}\left[\left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\int_a^t g^q(x)\mathrm{d}x\right)^2\right.\\&\left.-\left(\int_a^t f^p(x)e(x)\mathrm{d}x\int_a^t g^q(x)\mathrm{d}x-\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\int_a^t g^q(x)e(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{4.7}$$

则有

$$G(t_1)\le G(t_2),\quad a\le t_1\le t_2\le b. \tag{4.8}$$

证 这里仅仅给出不等式(4.6)的证明. 不等式(4.8)的证明可以类似地给出. 经过一些简单的运算，有

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^N A_rB_r\sum_{k=1}^N A_kB_k(1-e_r+e_k)\\&=\sum_{r=1}^N\sum_{k=1}^N A_rB_rA_kB_k-\sum_{r=1}^N\sum_{k=1}^N A_rB_rA_kB_ke_r+\sum_{r=1}^N\sum_{k=1}^N A_rB_rA_kB_ke_k\\&=\left(\sum_{r=1}^N A_rB_r\right)^2.\end{aligned} \tag{4.9}$$

对于任意的 $C_{kr}>0$, $D_{kr}>0$, $k,r=1,2,\cdots$, 令

$$X_{nr}=\sum_{k=1}^n C_{kr}^p,\quad Y_{nr}=\sum_{k=1}^n D_{kr}^q.$$

一方面，对于 $t,s>0$, 由定理 1.10 可知

$$\begin{aligned}A_rB_rX_{nr}^{\frac{1}{p}}Y_{nr}^{\frac{1}{q}}&=tB_rX_{nr}^{\frac{1}{q}}t^{-1}\left(A_r^{\frac{p}{q}}Y_{nr}^{\frac{1}{q}}A_r^{1-\frac{p}{q}}X_{nr}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)\\&\ge\frac{1}{q}t^qB_r^qX_{nr}+\frac{1}{p}t^{-p}\left(A_r^{\frac{p}{q}}Y_{nr}^{\frac{1}{q}}A_r^{1-\frac{p}{q}}X_{nr}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^p\\&=\frac{1}{q}t^qB_r^qX_{nr}+\frac{1}{p}t^{-p}sA_r^{\frac{p^2}{q}}Y_{nr}^{\frac{p}{q}}s^{-1}A_r^{p-\frac{p^2}{q}}X_{nr}^{1-\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{q}t^q B_r^q X_{nr} + \frac{1}{p}t^{-p}\left[\frac{p}{q}s^{\frac{q}{p}} A_r^p Y_{nr} + \left(1-\frac{p}{q}\right)s^{\frac{q}{p-q}} A_r^p X_{nr}\right] \\
&= \frac{1}{q}t^q B_r^q X_{nr} + \frac{1}{q}t^{-p}s^{\frac{q}{p}} A_r^p Y_{nr} + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)t^{-p}s^{\frac{q}{p-q}} A_r^p X_{nr}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

另一方面，由 Hölder 不等式有

$$
\sum_{k=1}^{n} C_{kr}D_{kr} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} C_{kr}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} D_{kr}^q\right)^{\frac{1}{q}} = X_{nr}^{\frac{1}{p}}Y_{nr}^{\frac{1}{q}}. \tag{4.11}
$$

进而，对于任意的 $t>0$, $s>0$，如果设

$$
\begin{aligned}
F(m,n;s,t) = &\sum_{r=1}^{m} A_r B_r \left(\sum_{k=1}^{n} C_{kr}D_{kr}\right) - \frac{1}{q}t^q \sum_{r=1}^{m} B_r^q X_{nr} \\
&- \frac{1}{q}t^{-p}s^{\frac{q}{p}} \sum_{r=1}^{m} A_r^p Y_{nr} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)t^{-p}s^{\frac{q}{p-q}} \sum_{r=1}^{m} A_r^p X_{nr},
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

则利用不等式(4.11)和(4.10)，得到

$$
\begin{aligned}
&F(m+1,n;s,t) - F(m,n;s,t) \\
&= A_{m+1}B_{m+1}\sum_{k=1}^{n} C_{k(m+1)}D_{k(m+1)} - \frac{1}{q}t^q B_{m+1}^q X_{n(m+1)} \\
&\quad - \frac{1}{q}t^{-p}s^{\frac{q}{p}} A_{m+1}^p Y_{n(m+1)} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)t^{-p}s^{\frac{q}{p-q}} A_{m+1}^p X_{n(m+1)} \\
&\geq A_{m+1}B_{m+1}X_{n(m+1)}^{\frac{1}{p}}Y_{n(m+1)}^{\frac{1}{q}} - \frac{1}{q}t^q B_{m+1}^q X_{n(m+1)} \\
&\quad - \frac{1}{q}t^{-p}s^{\frac{q}{p}} A_{m+1}^p Y_{n(m+1)} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)t^{-p}s^{\frac{q}{p-q}} A_{m+1}^p X_{n(m+1)} \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&F(m,n+1;s,t) - F(m,n;s,t) \\
&= \sum_{r=1}^{m} A_r B_r C_{(n+1)r}D_{(n+1)r} - \frac{1}{q}t^q \sum_{r=1}^{m} B_r^q C_{(n+1)r}^p \\
&\quad - \frac{1}{q}t^{-p}s^{\frac{q}{p}} \sum_{r=1}^{m} A_r^p D_{(n+1)r}^q - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)t^{-p}s^{\frac{q}{p-q}} \sum_{r=1}^{m} A_r^p C_{(n+1)r}^p \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

进而，由不等式(4.13)和(4.14)有

$$F(n,n;s,t) \le F(n+1,n;s,t) \le F(n+1,n+1;s,t). \tag{4.15}$$

此外考虑到

$$\frac{\partial F(n,n;s,t)}{\partial s} = -\frac{1}{p}t^{-p}s^{\frac{q-p}{p}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr} + \frac{1}{p}t^{-p}s^{\frac{2q-p}{p-q}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(n,n;s,t)}{\partial t} =& -t^{q-1}\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr} + \frac{p}{q}t^{-p-1}s^{\frac{q}{p}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\\ &+\left(1-\frac{p}{q}\right)t^{-p-1}s^{\frac{q}{p-q}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr},\end{aligned} \tag{4.17}$$

由下面两个方程

$$\frac{\partial F(n,n;s,t)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial F(n,n;s,t)}{\partial t} = 0,$$

我们得到

$$s_0 = \left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}}{\sum\limits_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}}\right)^{\frac{p(q-p)}{q^2}},$$

$$t_0 = \frac{1}{\left(\sum\limits_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{pq}}}\left[\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{1}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{1}{pq}-\frac{1}{q^2}}\right].$$

从而，由不等式(4.16)和(4.17)有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial s^2} =& \frac{p-q}{p^2}t^{-p}s^{\frac{q-2p}{p}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\\ &+\frac{2q-p}{p(p-q)}t^{-p}s^{\frac{3q-2p}{p-q}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr},\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial s\partial t} = t^{-p-1}s^{\frac{q-p}{p}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr} - t^{-p-1}s^{\frac{2q-p}{p-q}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial t^2} =&(1-q)t^{q-2}\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr} - \frac{p(p+1)}{q}t^{-p-2}s^{\frac{q}{p}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr} \\ &+\frac{(p-q)(p+1)}{q}t^{-p-2}s^{\frac{q}{p-q}}\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

经过一些简单的运算，得到

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial s^2}\right|_{(s_0,t_0)} =&\frac{q^2}{p^2(p-q)}\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{3pq-2p^2-p}{q^2}} \\ &\cdot\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{q^2-3pq+2p^2+p-q}{q^2}} > 0,\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial s\partial t}\right|_{(s_0,t_0)} = 0, \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial t^2}\right|_{(s_0,t_0)} =&-pq\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{p+2}{pq}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{q-2}{q^2}} \\ &\cdot\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{q^2-pq-2q+2p}{pq^2}} > 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

如果设

$$A = \left.\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial s^2}\right|_{(s_0,t_0)},$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial s\partial t}\right|_{(s_0,t_0)},$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 F(n,n;s,t)}{\partial t^2}\right|_{(s_0,t_0)},$$

则由(4.21), (4.22)和(4.23)有

$$AC - B^2 > 0. \tag{4.24}$$

进而，由上面的不等式(4.24)和(4.21)得到

$$\min_{t,s>0}\{F(n,n;s,t)\} = F(n,n;s_0,t_0), \tag{4.25}$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\min_{t,s>0}\{F(n,n;s,t)\}\\
&\quad = F(n,n;s_0,t_0)\\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} A_r B_r\left(\sum_{k=1}^{n} C_{kr} D_{kr}\right)\\
&\qquad - \frac{\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)}{q\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{p}}}\\
&\qquad - \frac{\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)}{q\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{p}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{p}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{1-\frac{p}{q}}}\\
&\qquad - \frac{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)}{\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^q Y_{nr}\right)^{\frac{p}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{p}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{p}{q}}}\\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} A_r B_r\left(\sum_{k=1}^{n} C_{kr} D_{kr}\right)\\
&\qquad - \frac{1}{q}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad - \frac{1}{p}\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{p}{q}-\frac{p}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{1-\frac{1}{q}-\frac{p}{q}+\frac{p}{q^2}}\\
&\quad = \sum_{r=1}^{n} A_r B_r\left(\sum_{k=1}^{n} C_{kr} D_{kr}\right)\\
&\qquad - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p X_{nr}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p Y_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q X_{nr}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

类似地，如果设

$$s_1 = \left(\frac{\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p X_{(n+1)r}}{\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p Y_{(n+1)r}}\right)^{\frac{p(q-p)}{q^2}},$$

$$t_1 = \frac{1}{\left(\sum_{r=1}^{n+1} B_r^q X_{(n+1)r}\right)^{\frac{1}{pq}}}\left[\left(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p Y_{(n+1)r}\right)^{\frac{1}{q^2}}\left(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p X_{(n+1)r}\right)^{\frac{1}{pq}-\frac{1}{q^2}}\right],$$

则

$$\begin{aligned}
&F(n+1, n+1; s_1, t_1)\\
&= \sum_{r=1}^{n+1} A_r B_r \left(\sum_{k=1}^{n+1} C_{kr} D_{kr}\right)\\
&\quad - \left(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p X_{(n+1)r}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p Y_{(n+1)r}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=1}^{n+1} B_r^q X_{(n+1)r}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

由(4.15)，有

$$F(n, n; s_1, t_1) \le F(n+1, n+1; s_1, t_1). \tag{4.28}$$

进而由(4.25)和(4.28)，得到

$$F(n, n; s_0, t_0) \le F(n+1, n+1; s_1, t_1). \tag{4.29}$$

设

$$C_{kr} = A_k(1 - e_r + e_k)^{\frac{1}{p}}, \quad D_{kr} = B_k(1 - e_r + e_k)^{\frac{1}{q}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&F(n, n; s_0, t_0)\\
&= \sum_{r=1}^{n} A_r B_r \sum_{k=1}^{n} A_k B_k (1 - e_r + e_k)\\
&\quad - \left[\sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{k=1}^{n} A_k^p (1 - e_r + e_k)\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&\quad \cdot \left[\sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{k=1}^{n} B_k^q (1 - e_r + e_k)\right]^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{k=1}^{n} A_k^p (1 - e_r + e_k)\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r\Big)^2 - \Big[\Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\Big)^2\Big]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\quad \cdot \Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{k=1}^{n} B_k^q - \sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r \sum_{k=1}^{n} B_k^q + \sum_{r=1}^{n} A_r^p \sum_{k=1}^{n} B_k^q e_k\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \cdot \Big(\sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{k=1}^{n} A_k^p - \sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r \sum_{k=1}^{n} A_k^p + \sum_{r=1}^{n} B_r^q \sum_{k=1}^{n} A_k^p e_k\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r\Big)^2 - \Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\Big)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \Big\{\Big[\Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\Big)\Big]^2 \\
&\quad - \Big[\Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\Big) - \Big(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\Big)\Big]^2\Big\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

类似地，有

$$
\begin{aligned}
&F(n+1, n+1; s_1, t_1) \\
&= \Big(\sum_{r=1}^{n+1} A_r B_r\Big)^2 - \Big(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p\Big)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \Big\{\Big[\Big(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n+1} B_r^q\Big)\Big]^2 \\
&\quad - \Big[\Big(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p e_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n+1} B_r^q\Big) - \Big(\sum_{r=1}^{n+1} B_r^q e_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n+1} A_r^p\Big)\Big]^2\Big\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

由(4.29), (4.30)和(4.31)即可得到我们要证的不等式(4.6). □

注意：对于(4.5)如果令 $n = 1$, 则有 $F(1) = 0$. 进而由定理 4.3 就可以得到离散型的反向胡克不等式. 类似地，对于(4.8)如果设 $t_1 = a$, $t_2 = b$, 利用定理 4.4 就可以得到积分型的反向胡克不等式.

4.3 Hölder 不等式构成的函数的单调性

在(4.1)和(4.5)中分别取

$$
\Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p e_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\Big) = \Big(\sum_{r=1}^{n} B_r^q e_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\Big),
$$

则由定理 4.1 和定理 4.3 可得 Hölder 不等式构成函数的如下单调性性质：

定理 4.5[35][13]　设 $A_r \ge 0$, $B_r > 0$ $(r = 1, 2, \cdots)$, 并且设

$$F(n) = \left(\sum_{r=1}^{n} A_r B_r\right)^2 - \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}} \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{2}{q}}. \tag{4.32}$$

如果 $p \ge q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$F(n) \ge F(n+1) \ge 0; \tag{4.33}$$

如果 $q < 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$0 \le F(n) \le F(n+1). \tag{4.34}$$

类似地, 在(4.3)和(4.7)中分别取

$$\int_a^t f^p(x)e(x)\mathrm{d}x \int_a^t g^q(x)\mathrm{d}x \equiv \int_a^t g^q(x)e(x)\mathrm{d}x \int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x,$$

则由定理 4.2 和定理 4.4 可得积分型 Hölder 不等式构成函数的如下单调性性质:

定理 4.6[35][13]　设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x) \ge 0$, $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$, 设

$$G(t) = \left(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^t g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}. \tag{4.35}$$

如果 $p \ge q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$G(t_1) \ge G(t_2) \ge 0, \quad a \le t_1 \le t_2 \le b. \tag{4.36}$$

如果 $q < 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$0 \le G(t_1) \le G(t_2), \quad a \le t_1 \le t_2 \le b. \tag{4.37}$$

由定理 4.5 和定理 4.6 可得如下 Hölder 不等式的改进:

推论 4.1　设 $A_r \ge 0$, $B_r > 0$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $p \ge q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \le \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{1}{q}} (1+\rho)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.38}$$

其中

$$\rho = \frac{(A_1B_1 + A_2B_2)^2 - (A_1^p + A_2^p)^{\frac{2}{p}} (B_1^q + B_2^q)^{\frac{2}{q}}}{\left(\sum\limits_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}} \left(\sum\limits_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{2}{q}}} \le 0;$$

如果 $q < 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\sum_{r=1}^{n} A_r B_r \ge \left(\sum_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{1}{q}} (1+\pi)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.39}$$

其中

$$\pi = \frac{(A_1B_1 + A_2B_2)^2 - (A_1^p + A_2^p)^{\frac{2}{p}} (B_1^q + B_2^q)^{\frac{2}{q}}}{\left(\sum\limits_{r=1}^{n} A_r^p\right)^{\frac{2}{p}} \left(\sum\limits_{r=1}^{n} B_r^q\right)^{\frac{2}{q}}} \ge 0.$$

推论 4.2 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$. 如果 $p \ge q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.40}$$

其中

$$\theta = \frac{\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}}{\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}}$$

$$\le 0;$$

如果 $q < 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} (1+\eta)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.41}$$

其中

$$\eta = \frac{\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}}{\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}}$$

$\geq 0.$

4.4 Minkowski 不等式构成的函数的单调性

定理4.7[35][13] 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数，并且 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. 设

$$\begin{aligned} M(t) = &\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^{p-1} f(x)\mathrm{d}x\right]^2 + \left[\int_a^t (f(x)+g(x))^{p-1} g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \\ &- \left[\left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_a^t g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}\right]\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^p \mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

如果 $0 < p < 1$, 则有

$$0 \leq M(t_1) \leq M(t_2), \quad a \leq t_1 \leq t_2 \leq b; \tag{4.43}$$

如果 $p > 1$, 则有

$$M(t_1) \geq M(t_2) \geq 0, \quad a \geq t_1 \leq t_2 \leq b. \tag{4.44}$$

证 这里只证明 $0 < p < 1$ 时的情形，$p > 1$ 时的情形可以类似地给出. 记

$$\begin{aligned} M_f(t) = &\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^{p-1} f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \\ &- \left[\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{2}{p}}\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^p \mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}, \\ M_g(t) = &\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^{p-1} g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \\ &- \left[\int_a^t g^p(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{2}{p}}\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^p \mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

由定理 4.6 可知函数 $M_f(t)$ 和 $M_g(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上关于 t 是递增的. 又由于 $M(t)=M_f(t)+M_g(t)$, 故有

$$0\le M(t_1)\le M(t_2),\quad a\le t_1\le t_2\le b. \qquad \square$$

评注 4.1 一方面, 由定理 4.7 可知在 $0<p<1$ 时, $M(b)\ge 0$. 另一方面, 由 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}&\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)\mathrm{d}x\right]\\&\quad\ge\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^t g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}.\end{aligned}\tag{4.45}$$

进而由上述不等式及 $M(b)\ge 0$ 可得 Minkowski 不等式在 $0<p<1$ 时的结论.

类似地, 可得 Minkowski 不等式在 $p\ge 1$ 时的结论.

由定理 4.7 和评注 4.1, 可得如下 Minkowski 不等式的改进形式:

推论4.3[35][13] 设 $f(x),g(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x)>0$, $g(x)>0$. 设

$$\begin{aligned}M(t)=&\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)\mathrm{d}x\right]^2+\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)\mathrm{d}x\right]^2\\&-\left[\left(\int_a^t f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}+\left(\int_a^t g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}\right]\left[\int_a^t (f(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}.\end{aligned}\tag{4.46}$$

如果 $0<p<1$, 则有

$$\begin{aligned}&\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^p f(x)\mathrm{d}x\right]^2\\&\quad\ge\left[\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^t g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]^2\\&\qquad\cdot\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}+M\left(\frac{a+b}{2}\right);\end{aligned}\tag{4.47}$$

如果 $p>1$, 则有

$$\begin{aligned}&\left[\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^p f(x)\mathrm{d}x\right]^2\\&\quad\le\left[\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^t g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]^2\\&\qquad\cdot\left[\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^p\mathrm{d}x\right]^{2-\frac{2}{p}}+M\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}\tag{4.48}$$

第5章 应　　用

自从胡克教授给出胡克不等式以及它的复数形式以来，出现了大量的关于这两个不等式的应用. 近几年来，随着对这两个不等式研究的深入，一些新的应用又相继出现. 本章的主要目的是介绍作者在这些领域的成果，关于其他学者的成果读者可参考文献[13]和[41]，或者参考本书附录中的内容.

5.1　Aczél-Popoviciu-Vasić 不等式的推广和改进

在 1956 年, Aczél[16] 建立了如下重要的不等式:

定理 5.1　如果 $a_i, b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是正数，并且使得

$$a_1^2-\sum_{i=2}^{n}a_i^2>0,\quad b_1^2-\sum_{i=2}^{n}b_i^2>0,$$

则有

$$\left(a_1^2-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\right)\left(b_1^2-\sum_{i=2}^{n}b_i^2\right)\leq\left(a_1b_1-\sum_{i=2}^{n}a_ib_i\right)^2. \tag{5.1}$$

不等式(5.1)就是著名的 Aczél 不等式.

在 1959 年, Popoviciu[31] 首先给出了上述 Aczél 不等式的如下推广:

定理 5.2　设 $p\geq q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 并且设 $a_i, b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是正数

且使得 $a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p>0$, $b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q>0$, 则有

$$\left(a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq a_1b_1-\sum_{i=2}^n a_ib_i. \tag{5.2}$$

随后在 1982 年, Vasić 和 Pečarić[38] 给出了不等式(5.2)的反向形式:

定理 5.3　设 $q<0$, $p>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 并且设 $a_i,b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是正数且使得 $a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p>0$, $b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q>0$, 则有

$$\left(a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq a_1b_1-\sum_{i=2}^n a_ib_i. \tag{5.3}$$

这里我们给出不等式(5.2)和(5.3)的推广和改进.

定理 5.4[36][41]　设 $a_i,b_i\geq 0$, $a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p>0$, $b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q>0$, 并且设 $1-e_i+e_j\geq 0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, $\mu=\min\left\{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q},1\right\}$, $\rho=\max\left\{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q},1\right\}$. 则对于 $p\geq q>0$, 有

$$\begin{aligned}&\left(a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&\quad\leq n^{1-\mu}\cdot b_1^{1-\frac{q}{p}}\left\{b_1^{2q}a_1^{2p}-\left[a_1^p\left(b_1^qe_1+\sum_{i=2}^n b_i^q(e_i-e_1)\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-b_1^q\left(a_1^pe_1+\sum_{i=2}^n a_i^p(e_i-e_1)\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2q}}-\sum_{i=2}^n a_ib_i.\end{aligned} \tag{5.4}$$

如果 $q<0$, $p>0$, 则有

$$\begin{aligned}&\left(a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&\quad\geq n^{1-\rho}\cdot a_1^{1-\frac{p}{q}}\left\{a_1^{2p}b_1^{2q}-\left[b_1^q\left(a_1^pe_1+\sum_{i=2}^n a_i^p(e_i-e_1)\right)\right.\right.\end{aligned}$$

$$-a_1^p\left(b_1^q e_1+\sum_{i=2}^n b_i^q(e_i-e_1)\right)\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2q}}-\sum_{i=2}^n a_i b_i. \tag{5.5}$$

证 在(2.8)和(3.10)中分别令

$$A_1^p=a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p,\quad B_1^q=b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q;$$

$$A_i=a_i,\ B_i=b_i\quad (i=2,3,\cdots,n),$$

则得到我们要证的结果. □

特别地, 如果在上述定理中令 $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$ 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则可以得到不等式(5.2)和(5.3)的如下改进:

推论 5.1 设 $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果 $p\geq q>0$, 则由定理 5.4 有

$$\begin{aligned}&\left(a_1^p-\sum_{i=2}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q-\sum_{i=2}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq a_1b_1\left\{1-\left(\frac{b_1^q e_1+\sum_{i=2}^n b_i^q(e_i-e_1)}{b_1^q}-\frac{a_1^p e_1+\sum_{i=2}^n a_i^p(e_i-e_1)}{a_1^p}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2q}}\\ &\quad-\sum_{i=2}^n a_i b_i.\end{aligned} \tag{5.6}$$

当 $q<0$ 时, 不等式(5.6)反向.

5.2 Hao Z-C 不等式和 A-G 不等式的改进

经典的 A-G 不等式是指: 如果 $a_j>0$, $\lambda_j>0$ $(j=1,2,\cdots,k)$, $p>0$, 并且 $\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j}=1$, 则

$$\prod_{j=1}^k a_j^{\frac{1}{\lambda_j}}\leq\sum_{j=1}^k\frac{a_j}{\lambda_j}. \tag{5.7}$$

而 1990 年数学家 Hao Z-C[23] 建立的如下不等式是上述算术-几何平均不等式的重要改进:

$$\prod_{j=1}^{k} a_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \le \left\{ p\int_0^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{k} (x+a_j)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right]^{-p-1} \mathrm{d}x \right\}^{-\frac{1}{p}} \le \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j}, \tag{5.8}$$

其中 $a_j > 0,\ \lambda_j > 0\ (j = 1, 2, \cdots, k),\ p > 0$ 并且 $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} = 1$.

在此, 我们给出上述 Hao Z-C 不等式的一个精美改进.

定理 5.5[32]　设 $a_j > 0\ (j = 1, 2, \cdots, k),\ p > 0,\ \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_k > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} = 1$, 并且设 $1 - e(x) + e(y) \ge 0$, $\int_0^{\infty} e(x)\mathrm{d}x < \infty$. 则有

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k} a_j^{\frac{1}{\lambda_j}} &\le \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \right) \left[\prod_{j=1}^{\rho(k)} \left(1 - \frac{1}{2\lambda_j} R^2(x, e; a_j, p) \right) \right]^{-\frac{1}{p}} \\
&\le \left\{ p\int_0^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{k} (x+a_j)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right]^{-p-1} \mathrm{d}x \right\}^{-\frac{1}{p}} \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j},
\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中 $\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}, & \text{若 } k \text{ 是偶数}, \\ \dfrac{k-1}{2}, & \text{若 } k \text{ 是奇数}, \end{cases}$

$$R(x, e; a_j, p) = \frac{\int_0^{\infty} (x + a_{2j-1})^{-p-1} e(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{\infty} (x + a_{2j-1})^{-p-1}\mathrm{d}x} - \frac{\int_0^{\infty} (x + a_{2j})^{-p-1} e(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{\infty} (x + a_{2j})^{-p-1}\mathrm{d}x}.$$

证　对于 $x \ge 0$, 在(5.8)中利用一个代换:

$$a_j \to x + a_j,$$

则有

$$0 < \prod_{j=1}^{k} (x+a_j)^{\frac{1}{\lambda_j}} \le \sum_{j=1}^{k} \frac{x+a_j}{\lambda_j} = x + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j}. \tag{5.10}$$

在上式两端从 0 到 ∞ 取积分有

$$\int_0^\infty \left(\prod_{j=1}^k (x+a_j)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right)^{-p-1} \mathrm{d}x \geq \int_0^\infty \left(x+\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j}\right)^{-p-1} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j}\right)^{-p}. \tag{5.11}$$

另一方面, 应用不等式(2.27)有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left[\prod_{j=1}^k (x+a_j)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]^{-p-1} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \prod_{j=1}^k \left[(x+a_j)^{-p-1}\right]^{\frac{1}{\lambda_j}} \mathrm{d}x \\
&\leq \left[\prod_{j=1}^k \left(\int_0^\infty (x+a_j)^{-p-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]\left[\prod_{j=1}^{\rho(k)} \left(1-\frac{1}{2\lambda_{2j}}R^2(x,e;a_j,p)\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^k a_j^{-\frac{p}{\lambda_j}}\right)\left[\prod_{j=1}^{\rho(k)} \left(1-\frac{1}{2\lambda_{2j}}R^2(x,e;a_j,p)\right)\right].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

由不等式(5.12)和(5.11)立刻可得要证的不等式(5.9). □

由上述定理 5.5 立刻可得如下算术-几何平均不等式的新的改进:

推论 5.2[32] 设 $a_j > 0\ (j=1,2,\cdots,k)$, $p>0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$, $\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} = 1$, 并且设 $1-e(x)+e(y) \geq 0$, $\int_0^\infty e(x)\mathrm{d}x < \infty$. 则有

$$\prod_{j=1}^k a_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \leq \left[\prod_{j=2}^{\rho(k)} \left(1-\frac{1}{2\lambda_j}R^2(x,e;a_j,p)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j}\right), \tag{5.13}$$

其中 $\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}, & \text{若 } k \text{ 是偶数}, \\ \dfrac{k-1}{2}, & \text{若 } k \text{ 是奇数}, \end{cases}$

$$R(x,e;a_j,p) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty (x+a_{2j-1})^{-p-1}e(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^\infty (x+a_{2j-1})^{-p-1}\mathrm{d}x} - \frac{\displaystyle\int_0^\infty (x+a_{2j})^{-p-1}e(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^\infty (x+a_{2j})^{-p-1}\mathrm{d}x}.$$

5.3 Hardy 型不等式的改进[37]

设 $f(x)\ge 0$, $f(x)\in L^p(0,\infty)$, $p>1$. 则著名的 Hardy 不等式是指:

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x\Big)^p dy \le \Big(\int_0^\infty K(x,1)x^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}x\Big)^p \int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x, \tag{5.14}$$

其中 $K(x,y)\ge 0$ 为齐负一次式. 如果 $0<p<1$, 则上述不等式(5.14)反向.

不等式(5.14)的两个重要特例是指:

定理 5.6 设 $p>1$, $f(x)\ge 0$, 并且对于任意的 $a>0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 或 $[a,\infty)$ 上都是 Lebesgue 可积的. 于是

$$\int_0^\infty y^{-r}F^p(y)\mathrm{d}y \le \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}\big(xf(x)\big)^p\mathrm{d}x \quad (r>1), \tag{5.15}$$

且

$$\int_0^\infty y^{-r}F^p(y)\mathrm{d}y \le \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}\big(xf(x)\big)^p\mathrm{d}x \quad (r<1), \tag{5.16}$$

其中

$$F(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y f(x)\mathrm{d}x, & r>1,\\ \displaystyle\int_y^\infty f(x)\mathrm{d}x, & r<1.\end{cases}$$

如果 $0<p<1$, 则上述不等式反向.

1977 年, Imoru 得到了下面一类 Hardy 型不等式:

定理 5.7 设函数 g 在区间 $[0,\infty]$ 上是单调递增且连续的函数, $g(0)=0$, $g(x)>0$ $(x>0)$, $g(\infty)=\infty$. 当 $r>1$ 时, 非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上是 Lebesgue 可积的; 当 $r<1$ 时, 非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上也是 Lebesgue 可积的, 其中 $a,b>0$. 假设

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t), & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}g(t), & r<1.\end{cases}$$

如果 $p\geq 1$，则

$$\begin{aligned}&\int_0^b g^{-r}(x)F^p(x)\mathrm{d}g(x)+\frac{p}{r-1}g^{1-r}(b)F^p(b)\\&\leq\left(\frac{p}{r-1}\right)^p\int_0^b g^{-r}(x)\big(f(x)g(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)\quad(r>1),\end{aligned}\tag{5.17}$$

并且

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty g^{-r}(x)F^p(x)\mathrm{d}g(x)+\frac{p}{1-r}g^{1-r}(a)F^p(a)\\&\leq\left(\frac{p}{1-r}\right)^p\int_a^\infty g^{-r}(x)\big(f(x)g(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)\quad(r<1).\end{aligned}\tag{5.18}$$

如果 $0<p\leq 1$，则上述所有不等式反向.

引理 5.1 设函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调递增的连续函数，并且设函数 $\varphi(x,t),e(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是可积的，其中 $\varphi(x,t)\geq 0$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$，且 ϕ 是单调递增函数. 如果 $p\geq 1$，则

$$\begin{aligned}&\int_0^b g^{-1}(x)\left(\int_0^x\varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)\mathrm{d}g(x)\\&\geq\int_0^b\left\{g^{-1}(x)\left(\int_0^x\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)^p\left(\int_0^x\mathrm{d}\phi(t)\right)^{1-p}\right.\\&\quad\left.\cdot\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_0^x\varphi(x,t)e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\displaystyle\int_0^x\varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)}-\frac{\displaystyle\int_0^x e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\displaystyle\int_0^x\mathrm{d}\phi(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x),\end{aligned}\tag{5.19}$$

并且

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty g^{-1}(x)\left(\int_x^\infty\varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)\mathrm{d}g(x)\\&\geq\int_a^\infty\left\{g^{-1}(x)\left(\int_x^\infty\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)^p\left(\int_x^\infty\mathrm{d}\phi(t)\right)^{1-p}\right.\end{aligned}$$

$$\cdot\left[1-\left(\frac{\int_x^{\infty}\varphi(x,t)e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_x^{\infty}\varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)}-\frac{\int_x^{\infty}e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_x^{\infty}\mathrm{d}\phi(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\Bigg\}\mathrm{d}g(x), \tag{5.20}$$

其中 $\beta=\max\{-1,1-p\}$. 如果 $0<p<1$, 则

$$\begin{aligned}&\int_0^b g^{-1}(x)\left(\int_0^x\varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)\mathrm{d}g(x)\\&\quad\le\int_0^b\left\{g^{-1}(x)\left(\int_0^x\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)^p\cdot\left(\int_0^x\mathrm{d}\phi(t)\right)^{1-p}\right.\\&\qquad\left.\cdot\left[1-\left(\frac{\int_0^x\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_0^x\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)}-\frac{\int_0^x e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_0^x\mathrm{d}\phi(t)}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x),\end{aligned} \tag{5.21}$$

并且

$$\begin{aligned}&\int_a^{\infty} g^{-1}(x)\left(\int_x^{\infty}\varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)\mathrm{d}g(x)\\&\quad\le\int_a^{\infty}\left\{g^{-1}(x)\left(\int_x^{\infty}\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)^p\left(\int_x^{\infty}\mathrm{d}\phi(t)\right)^{1-p}\right.\\&\qquad\left.\cdot\left[1-\left(\frac{\int_x^{\infty}\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_x^{\infty}\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)}-\frac{\int_x^{\infty} e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_x^{\infty}\mathrm{d}\phi(t)}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x),\end{aligned} \tag{5.22}$$

其中 $\gamma=\min\{p,1-p\}$.

证 由不等式(3.6)和(2.6)易得要证的结论. □

引理 5.2 设函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\infty]$ 上是单调递增且连续的函数, $g(0)=0$, $g(x)>0$ $(x>0)$, $g(\infty)=\infty$. 设 $\delta=\dfrac{1-r}{p}$, $r\neq 1$, 当 $r>1$ 时, 非负函数 $f(x),e(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上关于 $g(x)$ 是Lebesgue可积的;

当 $r<1$ 时，非负函数 $f(x),e(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上关于 $g(x)$ 也是 Lebesgue 可积的，其中 $a,b>0$，并且对于所有 $x,y\in[0,+\infty)$ 有 $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 假设

$$\lambda(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\left(g(t)\right)^{(p-1)(1+\delta)}f^p(t)\mathrm{d}g(t), & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty\left(g(t)\right)^{(p-1)(1+\delta)}f^p(t)\mathrm{d}g(t), & r<1.\end{cases}$$

如果 $p\geq 1$，则

$$\begin{aligned}&\int_0^b g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)\\ &\quad\geq(-\delta^{-1})^{1-p}\int_0^b\left\{\left(g(x)\right)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\left.-\frac{\displaystyle\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)\quad(r>1),\end{aligned}\tag{5.23}$$

并且

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)\\ &\quad\geq\delta^{p-1}\int_a^\infty\left\{\left(g(x)\right)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\left.-\frac{\displaystyle\int_x^\infty g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_x^\infty g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)\quad(r<1),\end{aligned}\tag{5.24}$$

其中

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t), & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}g(t), & r<1,\end{cases}$$

$\beta = \max\{-1, 1-p\}$. 如果 $0<p<1$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_0^b g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)\\
&\quad\le (-\delta^{-1})^{1-p}\int_0^b\left\{\big(g(x)\big)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_0^x f(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.-\frac{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)\quad (r>1), \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)\\
&\quad\le \delta^{p-1}\int_a^\infty\left\{\big(g(x)\big)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_x^\infty f(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.-\frac{\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)\quad (r<1), \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

其中

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t), & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}g(t), & r<1,\end{cases}$$

$\gamma = \min\{p, 1-p\}$.

证　这里仅仅给出不等式(5.23)的证明, 不等式(5.24), (5.25)和(5.26)的证明类似. 在不等式(5.19)中令

$$\varphi(x,t) = g^\delta(x)\big(g(t)\big)^{p(1+\delta)}f^p(t),$$
$$\mathrm{d}\phi(t) = \big(g(t)\big)^{-(1+\delta)}\mathrm{d}g(t).$$

如果 $r, p>1$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^b g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)\\
&=\int_0^b g^{-1}(x)\left(\int_0^x \varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)\mathrm{d}g(x)\\
&\geq \int_0^b \left\{g^{-1}(x)\left(\int_0^x \varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)^p\left(\int_0^x \mathrm{d}\phi(t)\right)^{1-p}\right.\\
&\quad\left.\cdot\left[1-\left(\frac{\int_0^x \varphi(x,t)e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_0^x \varphi(x,t)\mathrm{d}\phi(t)}-\frac{\int_0^x e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_0^x \mathrm{d}\phi(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)\\
&=\int_0^b \left\{g^{-1+\delta}(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t)\right)^p\left(\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)\right)^{1-p}\right.\\
&\quad\left.\cdot\left[1-\left(\frac{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}-\frac{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)\\
&=(-\delta^{-1})^{1-p}\int_0^b \left\{(g(x))^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\frac{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x).
\end{aligned}
$$

这样就得到我们要证的不等式(5.23). □

引理 5.3 设函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\infty]$ 上是单调递增且连续的函数, $g(0)=0$, $g(x)>0$ $(x>0)$, $g(\infty)=\infty$. 设 $\delta=\dfrac{1-r}{p}$, $r\neq 1$, 当 $r>1$ 时, 非负函数 $f(x),e(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上关于 $g(x)$ 是 Lebesgue 可积的; 当 $r<1$ 时, 非负函数 $f(x),e(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上关于 $g(x)$ 也是 Lebesgue 可积的, 其中 $a,b>0$, 并且对于所有 $x,y\in[0,+\infty)$ 有 $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 假设

$$\lambda(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \left(g(t)\right)^{(p-1)(1+\delta)} f^p(t)\mathrm{d}g(t), & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty \left(g(t)\right)^{(p-1)(1+\delta)} f^p(t)\mathrm{d}g(t), & r<1.\end{cases}$$

如果 $p>1$, 则

$$\begin{aligned}g^\delta(b)\lambda(b)\geq&(-\delta^{-1})^{1-p}g^{\delta p}(b)F^p(b)\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_0^b g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^b g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\displaystyle\int_0^b g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^b g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\quad(r>1),\end{aligned}\tag{5.27}$$

并且

$$\begin{aligned}g^\delta(a)\lambda(a)\geq&\delta^{p-1}g^{\delta p}(a)F^p(a)\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_a^\infty g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_a^\infty g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\displaystyle\int_a^\infty g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_a^\infty g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\quad(r<1).\end{aligned}\tag{5.28}$$

如果 $0<p<1$, 则

$$\begin{aligned}g^\delta(b)\lambda(b)\leq&(-\delta^{-1})^{1-p}g^{\delta p}(b)F^p(b)\left[1-\left(\frac{\displaystyle\int_0^b f(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^b f(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\displaystyle\int_0^b g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^b g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{2}}\quad(r>1),\end{aligned}\tag{5.29}$$

并且

$$g^{\delta}(a)\lambda(a) \leq \delta^{p-1} g^{\delta p}(a) F^{p}(a)$$
$$\cdot\left[1-\left(\frac{\int_{a}^{\infty} f(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_{a}^{\infty} f(t)\mathrm{d}g(t)}-\frac{\int_{a}^{\infty} g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_{a}^{\infty} g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^{2}\right]^{\frac{\gamma}{2}}$$
$$(r<1). \quad (5.30)$$

证 在此仅仅给出不等式(5.27)的证明, 不等式(5.28), (5.29)和(5.30)的证明可以类似地给出. 如果 $r, p>1$, 则由不等式(5.19)可知

$$\begin{aligned}
g^{\delta}(b)\lambda(b) &= g^{\delta}(b)\int_{0}^{b} g^{(p-1)(1+\delta)}(t) f^{p}(t)\mathrm{d}g(t) \\
&= \int_{0}^{b} \varphi(b,t)\mathrm{d}\phi(t) \\
&\geq \left(\int_{0}^{b} \varphi^{\frac{1}{p}}(b,t)\mathrm{d}\phi(t)\right)^{p}\left(\int_{0}^{b}\mathrm{d}\phi(t)\right)^{1-p} \\
&\quad \cdot\left[1-\left(\frac{\int_{0}^{b}\varphi(b,t)e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_{0}^{b}\varphi(b,t)\mathrm{d}\phi(t)}-\frac{\int_{0}^{b}e(t)\mathrm{d}\phi(t)}{\int_{0}^{b}\mathrm{d}\phi(t)}\right)^{2}\right]^{\frac{\beta}{2}} \\
&= (-\delta^{-1})^{1-p} g^{\delta p}(b) F^{p}(b)\left[1-\left(\frac{\int_{0}^{b} g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_{0}^{b} g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-\frac{\int_{0}^{b} g^{(1+\delta)(p-1)}(t) f^{p}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_{0}^{b} g^{(1+\delta)(p-1)}(t) f^{p}(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^{2}\right]^{\frac{\beta}{2}},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varphi(b,t) &= g^{\delta}(b)\big(g(t)\big)^{p(1+\delta)} f^{p}(t), \\
\mathrm{d}\phi(t) &= \big(g(t)\big)^{-(1+\delta)}\mathrm{d}g(t).
\end{aligned}$$

这样就得到我们要证的不等式(5.27). □

定理 5.8 设函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\infty]$ 上是单调递增且连续的函数,

$g(0)=0$，$g(x)>0\ (x>0)$，$g(\infty)=\infty$. 当 $r>1$ 时，非负函数 $f(x)$, $e(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上关于 $g(x)$ 是Lebesgue可积的；当 $r<1$ 时，非负函数 $f(x),e(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上关于 $g(x)$ 也是 Lebesgue 可积的，其中$a,b>0$，并且对于所有 $x,y\in[0,+\infty)$ 有 $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 设

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t), & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}g(t), & r<1.\end{cases}$$

如果 $p\geq 1$，则

$$\begin{aligned}&\int_0^b g^{-r}(x)F^p(x)\Big(1-\frac{\beta}{2}\omega^2(f,g,e;x)\Big)\mathrm{d}g(x)\\&\quad+\frac{p}{r-1}g^{1-r}(b)F^p(b)\Big(1-\frac{\beta}{2}\omega^2(f,g,e;b)\Big)\\&\quad\leq\Big(\frac{p}{r-1}\Big)^p\int_0^b g^{-r}(x)\big(f(x)g(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)\quad(r>1),\end{aligned}\tag{5.31}$$

并且

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty g^{-r}(x)F^p(x)\Big(1-\frac{\beta}{2}\varpi^2(f,g,e;x)\Big)\mathrm{d}g(x)\\&\quad+\frac{p}{1-r}g^{1-r}(b)F^p(b)\Big(1-\frac{\beta}{2}\varpi^2(f,g,e;a)\Big)\\&\quad\leq\Big(\frac{p}{1-r}\Big)^p\int_0^b g^{-r}(x)\big(f(x)g(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)\quad(r<1),\end{aligned}\tag{5.32}$$

其中 $\beta=\max\{-1,1-p\}$，$\delta=\dfrac{1-r}{p}$,

$$\omega(f,g,e;x)=\frac{\displaystyle\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}-\frac{\displaystyle\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)},$$

$$\varpi(f,g,e;x)=\frac{\displaystyle\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}-\frac{\displaystyle\int_x^\infty g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\displaystyle\int_x^\infty g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}.$$

如果 $0<p<1$，则

$$
\begin{aligned}
&\int_0^b g^{-r}(x)F^p(x)\Big(1-\frac{\gamma}{2}\mu^2(f,g,e;x)\Big)\mathrm{d}g(x) \\
&\quad+\frac{p}{r-1}g^{1-r}(b)F^p(b)\Big(1-\frac{\gamma}{2}\mu^2(f,g,e;b)\Big) \\
&\quad\geq\Big(\frac{p}{r-1}\Big)^p\int_0^b g^{-r}(x)\big(f(x)g(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)\quad(r>1),
\end{aligned}\tag{5.33}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
&\int_a^\infty g^{-r}(x)F^p(x)\Big(1-\frac{\gamma}{2}\nu^2(f,g,e;x)\Big)\mathrm{d}g(x) \\
&\quad+\frac{p}{1-r}g^{1-r}(b)F^p(b)\Big(1-\frac{\gamma}{2}\nu^2(f,g,e;a)\Big) \\
&\quad\geq\Big(\frac{p}{1-r}\Big)^p\int_0^b g^{-r}(x)\big(f(x)g(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)\quad(r<1),
\end{aligned}\tag{5.34}
$$

其中 $\gamma=\min\{p,1-p\}$，$\delta=\dfrac{1-r}{p}$，

$$
\mu(f,g,e;x)=\frac{\int_0^x f(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}g(t)}-\frac{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)},
$$

$$
\nu(f,g,e;x)=\frac{\int_x^\infty f(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}g(t)}-\frac{\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^\infty g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}.
$$

证 这里仅仅证明 $p\geq 1$ 时的情形，$0<p<1$ 时的证明类似.

(1) 当 $r>1$ 时，由函数 $g(x)$ 单调递增的性质可知

$$
\begin{aligned}
0<\lambda(x)&=\int_0^x g^{-(1-p)(1+\delta)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t) \\
&=\int_0^x g^{\frac{r-1}{p}}(t)\big(g^{p-r}(t)f^p(t)\big)\mathrm{d}g(t) \\
&\leq g^{\frac{r-1}{p}}(x)\int_0^x g^{p-r}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t),
\end{aligned}
$$

进而有

$$
\lim_{x\to 0^+}g^\delta(x)\lambda(x)=0,
$$

利用分部积分公式以及上面这个等式和不等式(5.23)可知

$$\int_0^b g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)$$
$$= \delta^{-1}g^{\delta}(b)\lambda(b) - \delta^{-1}\int_0^b g^{\delta p-1}(x)\big(g(x)f(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)$$
$$\geq (-\delta^{-1})^{1-p}\int_0^b \left\{\big(g(x)\big)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x),$$

也就是,

$$\int_0^b \left\{\big(g(x)\big)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_0^x g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)$$
$$\leq -\left(\frac{p}{r-1}\right)^p g^{\delta}(b)\lambda(b) + \left(\frac{p}{r-1}\right)^p\int_0^b g^{-r}(x)\big(g(x)f(x)\big)^p\mathrm{d}g(x). \quad (5.35)$$

联合不等式(5.27)和(5.35)立刻可得要证的不等式(5.31).

(2) 当$r<1$时, 采用与(1)的情况类似的方法可得

$$0<\lambda(x)=\int_x^{\infty} g^{-(1-p)(1+\delta)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)\leq g^{\frac{r-1}{p}}(x)\int_x^{\infty} g^{p-r}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t),$$

进而

$$\lim_{x\to\infty} g^{\delta}(x)\lambda(x)=0,$$

利用分部积分公式以及上面这个等式和不等式(5.24)有

$$\int_a^{\infty} g^{\delta-1}(x)\lambda(x)\mathrm{d}g(x)$$
$$=(-\delta)^{-1}g^{\delta}(a)\lambda(a)+\delta^{-1}\int_a^{\infty} g^{\delta p-1}(x)\big(g(x)f(x)\big)^p\mathrm{d}g(x)$$

$$\geq \delta^{p-1}\int_a^{\infty}\left\{\left(g(x)\right)^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_x^{\infty}g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^{\infty}g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\int_x^{\infty}g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^{\infty}g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x).$$

也就是,

$$\int_a^{\infty}\left\{(g(x))^{\delta p-1}F^p(x)\left[1-\left(\frac{\int_x^{\infty}g^{-(1+\delta)}(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^{\infty}g^{-(1+\delta)}(t)\mathrm{d}g(t)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\int_x^{\infty}g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)e(t)\mathrm{d}g(t)}{\int_x^{\infty}g^{(1+\delta)(p-1)}(t)f^p(t)\mathrm{d}g(t)}\right)^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}\mathrm{d}g(x)$$

$$\leq -\left(\frac{p}{1-r}\right)^p g^{\delta}(b)\lambda(b)+\left(\frac{p}{1-r}\right)^p\int_0^b g^{-r}(x)\left(g(x)f(x)\right)^p\mathrm{d}g(x). \tag{5.36}$$

联合不等式(5.28)和(5.36)立刻可得要证的不等式(5.32).

5.4 Minkowski 不等式的改进[33]

定理 5.9 设 $a_k>0$, $b_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$, $1-e_i+e_j\geq 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 如果 $0<p<1$, $\lambda=\max\left\{-1,1-\dfrac{1}{p}\right\}$, 则有

$$\left[\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}\geq\left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(1-\frac{\lambda}{2}\varpi^2(a,b,e)\right)$$

$$\geq\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.37}$$

其中

$$\varpi(a,b,e)=\frac{1}{\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^2}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k\right].$$

积分形式如下:

定理 5.10 设 $f(x),g(x),e(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 并且 $f(x)>0$, $g(x)>0$. 对于任意的 $x,y\in[a,b]$ 有 $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $0<p<1$, $\lambda=\max\left\{-1,1-\dfrac{1}{p}\right\}$, 则有

$$\begin{aligned}&\left[\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\\&\geq\left[\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(1-\frac{\lambda}{2}\omega^2(a,b,e)\right)\\&\geq\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}\tag{5.38}$$

其中

$$\begin{aligned}\omega(a,b,e)=&\frac{1}{\left[\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)^p\mathrm{d}x\right]^2}\\&\cdot\left[\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)^p e(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\big(f(x)+g(x)\big)^{p-1}\mathrm{d}x\right.\\&\left.-\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)^p\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\big(f(x)+g(x)\big)^{p-1}e(x)\mathrm{d}x\right].\end{aligned}\tag{5.39}$$

证 这里仅仅给出定理 5.9 的证明, 定理 5.10 的证明类似. 记

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}.$$

由推论 3.8 可得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\cdot\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p}-\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k}{\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}}\right)^2\right]$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\cdot\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p}-\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}}\right)^2\right]. \tag{5.40}$$

上式两端同除以 $\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$，有

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$-\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p}-\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k}{\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}}\right)^2$$
$$-\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p}-\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}}\right)^2. \tag{5.41}$$

另一方面，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k. \tag{5.42}$$

进而，由不等式(5.41)和(5.42)有

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{(-\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}{2\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\right]^2} \\
&\quad\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\right. \\
&\quad\left.-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k\right]^2 \\
&\quad+\frac{(-\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}{2\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}\right]^2} \\
&\quad\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k\right. \\
&\quad\left.-\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k\right]^2 \\
&\geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{(-\lambda)\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]}{2\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^4} \\
&\quad\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\right. \\
&\quad\left.-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k\right]^2 \\
&=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left\{1-\frac{\lambda}{2\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^4}\right. \\
&\quad\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p e_k\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}e_k\Bigg]^2\Bigg\}. \tag{5.43}$$

从而得到不等式(5.37)的证明. □

5.5 Wang C-L 不等式的改进

1983 年, Wang, C-L 在[39]中建立了如下重要的不等式:

定理 5.11 设函数 $f(x),g(x)$ 是定义在区间 $[0,T]$ 上的正的可积函数, 并且设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果 $0<p<1$, 则对于任意正数 a,b,c 有

$$\frac{\left(a+c\int_0^T h^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_0^T h(x)g(x)\mathrm{d}x}\geq\frac{\left(a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_0^T f(x)g(x)\mathrm{d}x} \tag{5.44}$$

成立, 其中 $h(x)=\left(\frac{ag(x)}{b}\right)^{\frac{q}{p}}$. 如果 $p>1$, 则上述不等式 (5.44) 反向.

定理 5.12[32] 设函数 $f(x),g(x),e(x)$ 是定义在区间 $[0,T]$ 上的可积函数, 并且 $f(x),g(x)>0$, $1-e(x)+e(y)\geq 0$. 如果 $0<p<1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对于任意正数 a,b,c 有不等式

$$\frac{\left(a+c\int_0^T h^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_0^T h(x)g(x)\mathrm{d}x}\geq\frac{\left(a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_0^T f(x)g(x)\mathrm{d}x}$$
$$\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x}{a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x}-\frac{c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x}{a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right] \tag{5.45}$$

成立, 其中 $h(x)=\left(\frac{ag(x)}{b}\right)^{\frac{q}{p}}$.

证 一方面, 经过一些简单的运算有

$$\frac{\left(a+c\int_0^T h^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_0^T h(x)g(x)\mathrm{d}x}=\left(a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{q}}. \tag{5.46}$$

另一方面, 在不等式 (5.35) 中令 $e_1=0$, $e_2=1$, $m=2$, 由推论3.10可得

$$\begin{aligned}
&b+c\int_0^T f(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&\geq b+c\left(\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=a^{\frac{1}{p}}(ba^{-\frac{1}{p}})+\left(c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\geq\left(a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x}{a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x}-\frac{c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x}{a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{5.47}$$

也就是,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{q}}&\geq\frac{\left(a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_0^T f(x)g(x)\mathrm{d}x}\\
&\quad\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x}{a+c\int_0^T f^p(x)\mathrm{d}x}-\frac{c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x}{a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_0^T g^q(x)\mathrm{d}x}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{5.48}$$

联合上述不等式(5.46)和(5.48), 立刻可得要证的不等式(5.45). □

5.6 Wang C-L 不等式和 Beckenbach 型不等式的时间标度形式

在这一节，我们首先给出 Wang C-L 不等式的时间标度版本及其改进形式，进而得到 Beckenbach 型不等式的时间标度版本及其改进形式.

经典的 Beckenbach 不等式是指:

定理 5.13[19] 设 $0 \leq p \leq 1$，并且 $a_i, b_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. 则有

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p-1}} \geq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}} + \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}}.$$

Wang C-L 不等式是指:

定理 5.14[39] 设函数 $f(x), g(x)$ 是定义在区间 $[s, t]$ 上的正的可积函数，并且设 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 如果 $0 < p < 1$，则对于任意正数 a, b, c 有

$$\frac{\left(a + c\displaystyle\int_s^t k^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\displaystyle\int_s^t k(x)g(x)\mathrm{d}x} \geq \frac{\left(a + c\displaystyle\int_s^t f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\displaystyle\int_s^t f(x)g(x)\mathrm{d}x} \tag{5.49}$$

成立，其中 $k(x) = \left(\dfrac{ag(x)}{b}\right)^{\frac{q}{p}}$. 如果 $p > 1$，则不等式(5.49)反向.

定理 5.15[36] 设 $f(x), g(x), h(x) \in C_{rd}([s, t], [0, +\infty))$，并且设 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 如果 $p > 1$，则对于任意正数 a, b, c 有不等式

$$\frac{\left(a+c\int_s^t h(x)k^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_s^t h(x)k(x)g(x)\Delta x}\le\frac{\left(a+c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_s^t h(x)f(x)g(x)\Delta x}$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x}{a+c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x}-\frac{c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x}{a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x}\right)^2\right]\tag{5.50}$$

成立，其中 $k(x)=\left(\frac{ag(x)}{b}\right)^{\frac{q}{p}}$. 如果 $0<p<1$，则不等式(5.50)反向.

证　这里仅仅考虑 $0<p<1$ 时的情形，$p>1$ 时的情形类似. 注意到 $1+\frac{q}{p}=q$，不等式(5.50)的左边变为

$$\frac{\left[a+c\int_s^t h(x)\left(\frac{ag(x)}{b}\right)^q\Delta x\right]^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_s^t h(x)\left(\frac{ag(x)}{b}\right)^{\frac{q}{p}}g(x)\Delta x}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q}{p}}\left[a\left(\frac{b}{a}\right)^q+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x\right]^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q}{p}}\left[b\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{q}{p}}+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x\right]}$$

$$=\left(a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x\right)^{-\frac{1}{q}}.\tag{5.51}$$

另一方面，利用 Hölder 不等式及(5.45)，其中取 $e_1=0$，$e_2=1$，有

$$\begin{aligned}&b+c\int_s^t h(x)f(x)g(x)\Delta x\\&\quad\ge b+c\left(\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\quad=a^{\frac{1}{p}}\left(ba^{-\frac{1}{p}}\right)+\left(c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}\left(c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$\geq \left(a+c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}\left(a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\cdot\left[1-\frac{1}{2q}\left(\frac{c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x}{a+c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x}-\frac{c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x}{a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x}\right)^2\right].\tag{5.52}$$

联合不等式(5.51)和(5.52)立刻可得要证的不等式(5.50).

在不等式(5.50)中取

$$\frac{c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x}{a+c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x}=\frac{c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x}{a^{-\frac{q}{p}}b^q+c\int_s^t h(x)g^q(x)\Delta x},$$

则由定理 5.15 立刻可得 Beckenbach 型不等式的时间标度版本:

推论 5.3[36] 设 $f(x),g(x),h(x)\in C_{rd}([s,t],[0,+\infty))$, 并且设 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 如果 $p>1$, 则对于任意的正数 a,b,c 不等式

$$\frac{\left(a+c\int_s^t h(x)k^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_s^t h(x)k(x)g(x)\Delta x}\leq\frac{\left(a+c\int_s^t h(x)f^p(x)\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}}{b+c\int_s^t h(x)f(x)g(x)\Delta x}\tag{5.53}$$

成立, 其中 $k(x)=\left(\dfrac{ag(x)}{b}\right)^{\frac{q}{p}}$. 如果 $0<p<1$, 则不等式(5.53)反向.

5.7 离散型 Beckenbach 不等式的改进

在 1950 年, Beckenbach[17] 建立了如下重要的不等式:

定理 5.16 设 $0\leq p\leq 1$, 并且 $a_i,b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 则有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}}.$$

利用前面给出的反向胡克不等式可以得到上述离散型 Beckenbach 不等式的如下改进:

定理 5.17[33] 设$a_i, b_i > 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $1-e_i+e_j \geq 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 并且 $0<p<1$, $\lambda=\max\left\{-1, 1-\dfrac{1}{p}\right\}$. 则有

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}} &\geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}}\right) \\
&\quad \cdot\left\{1-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}+e_2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-\frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+e_2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\right]^2\right\} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

证 利用 Minkowski 不等式和推论 3.8, 有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \geq \left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\
&\geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}}\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} \\
&\quad \cdot \left\{1 - \frac{\lambda}{2}\left[\frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + e_2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + e_2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right]^2\right\} \\
&\geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p-1}\right] \\
&\quad \cdot \left\{1 - \frac{\lambda}{2}\left[\frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + e_2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + e_2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right]^2\right\},
\end{aligned}
$$

也就是,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}}\right)$$
$$\cdot\left\{1-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}+e_2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{e_1\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+e_2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\right]^2\right\}. \tag{5.55}$$

这样就得到我们要证的不等式. □

附　　录

为了体系的完整性，在本附录中给出胡克教授利用胡克不等式得到的一些经典不等式的改进结果，有关细节的证明读者可以参考文献[13].

Dresher 不等式　设 $A_i, B_i \geq 0$，$1 - e_i + e_j > 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，$0 < r < 1 < p$，则有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)^r}\right)^{\frac{1}{p-r}} \leq \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i^p}{\sum_{i=1}^{n}A_i^r}\right)^{\frac{1}{p-r}} + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}B_i^p}{\sum_{i=1}^{n}B_i^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}\right].$$

相应的 Dresher 不等式的改进如下：

定理 1　设 $A_i, B_i \geq 0$，$1 - e_i + e_j \geq 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，$0 < r < 1 < p$，则有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)^r}\right)^{\frac{1}{p-r}} \leq \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i^p}{\sum_{i=1}^{n}A_i^r}\right)^{\frac{1}{p-r}} + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}B_i^p}{\sum_{i=1}^{n}B_i^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}\right]$$

$$-\left\{\frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}B_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^r}{\sum_{i=1}^{n}(A_i+B_i)^r}\right\}^{\frac{1}{p-r}}\cdot\frac{\mu(p)}{2}S^2(A,B,e),$$

其中

$$S(A,B,e)=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i^p+B_i^p)e_i}{\sum_{i=1}^{n}(A_i^p+B_i^p)}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i+B_i)^p e_i}{\sum_{i=1}^{n}(A_i+B_i)^p}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(A_i^p+B_i^p)\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\mu(p)=\min\left\{\frac{1}{2p},\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\right\}.$$

Nagy 不等式　设 $b>a>0$, $p>1$, $q=1+\dfrac{p-1}{p}\alpha$, $f'\in L^p(a,b)$, 并且 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有零点, 则有

$$|f(a)|^q+|f(b)|^q\le q\left[\left(\int_a^b|f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\right].$$

相应的 Nagy 不等式的改进如下:

定理 2　设 $b>a>0$, $p>1$, $q=1+\dfrac{p-1}{p}\alpha$, $f'\in L^p(a,b)$, 并且 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有零点, 此外对于任意 $x,y\in[a,b]$, 函数 $1-e(x)+e(y)\ge 0$. 则

(1) 当 $1<p\le 2$ 时, 有

$$|f(a)|^q+|f(b)|^q\le q\left(\int_a^b|f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}-1}\cdot\left[\left(\int_a^b|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\int_a^b|f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^2-\beta^2\right]^{\frac{p-1}{2p}};$$

(2) 当 $p>2$ 时 有

$$\left|f(a)\right|^q+\left|f(b)\right|^q\leq q\left(\int_a^b\left|f(x)\right|^\alpha\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{2}{p}}\cdot\left[\left(\int_a^b\left|f(x)\right|^\alpha\mathrm{d}x\int_a^b\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^2-\beta^2\right]^{\frac{1}{2p}},$$

其中

$$\beta=\int_a^b\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x\int_a^b\left|f(x)\right|^\alpha e(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\left|f(x)\right|^\alpha\mathrm{d}x\int_a^b\left|f'(x)\right|^p e(x)\mathrm{d}x.$$

Opial-beesack 不等式 设 $f(x)$ 为区间 $[0,h]$ 上的绝对连续函数，$f(0)=0$，设 $p,q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，并且设 $g(x)>0$，$\int_0^h g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x$ 都存在，则有

$$\int_0^h\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}\left(\int_0^h g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}.$$

相应的 Opial-beesack 不等式的改进如下：

定理 3（改进 1） 设 $f(x)$ 为区间 $[0,h]$ 上的绝对连续函数，$f(0)=0$，设 $p,q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$，$g(x)>0$，$\int_0^h g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x$ 都存在，则

(1) 当 $p\geq 2$ 时，有

$$\int_0^h\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}\left(\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}\cdot\left[\left(\int_0^h g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^2-\gamma^2(0,h)\right];$$

(2) 当 $1<p<2$ 时，有

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\left(\int_0^h g^p(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}$$
$$\cdot\left[\left(\int_0^h g^p(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^2-\gamma^2(0,h)\right]^{\frac{1}{q}},$$

其中

$$\gamma(0,h)=\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x\int_0^h e(x)g(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^h g(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x\int_0^h e(x)g^{-q}(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，若取 $p=2$，$g(x)\equiv 1$，$e(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi x}{h}$，则有

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{h}{2}\left[\left(\int_0^h |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\int_0^h |f'(x)|^2\cos\frac{\pi x}{h}\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

定理4（改进2）　设 $f(x)$ 为区间 $[0,h]$ 上的绝对连续函数，$f(0)=f(h)=0$，

设 $p,q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$1-e(x)+e(y)\ge 0$，并且

$$\int_0^{\frac{h}{2}} e(x)g^{-q}(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{h}{2}}^h e(x)g^{-q}(x)\mathrm{d}x,$$

设 $g(x)>0$，并且 $\displaystyle\int_0^{\frac{h}{2}} g^{-q}(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{h}{2}}^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x$，则当 $1<p<2$ 时有

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\left(\int_0^h g^p(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{p}-2}$$
$$\cdot\left[\left(\int_0^h g^p(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x\int_0^{\frac{h}{2}} g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^2-\gamma^2(0,h)\right]^{\frac{1}{q}},$$

其中

$$\gamma(0,h)=\int_0^{\frac{h}{2}} g^{-q}(x)\mathrm{d}x\int_0^h e(x)g^p(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^h g(x)|f'(x)|^p\mathrm{d}x\int_0^{\frac{h}{2}} g^{-q}(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，若取 $p=2$，$g(x)\equiv 1$，$e(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2\pi x}{h}$，则有

$$\int_0^h \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \leq \frac{h}{4}\left[\left(\int_0^h \left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\int_0^h \left|f'(x)\right|^2\cos\frac{2\pi x}{h}\,\mathrm{d}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

定理 5（改进 3） 设 $f(x)$ 为区间 $[0,h]$ 上的绝对连续函数，$f(0)=0$，设 $p,q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$1-e(x)+e(y)\geq 0$，$g(x)>0$，$\displaystyle\int_0^h g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x$ 都存在，则当 $0\leq h_1<h$ 时有

$$\begin{aligned}
&\int_{h_1}^h \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\\
&\quad\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^h g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^h g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}\left(1-\lambda^2(e,f'(x),0,h)\right)^{\mu(p)}\\
&\qquad-\frac{1}{2}\left(\int_0^{h_1} g^{-q}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^{h_1} g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}\\
&\qquad\cdot\left(1-\lambda^2(e,f'(x),0,h_1)\right)^{\mu(p)},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\lambda(e,f'(x),0,t)&=tg^{-q}(x)\int_0^t e(x)g^p(x)\left|f(x)\right|^p\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{tg^p(x)\left|f'(x)\right|^p\displaystyle\int_0^t g^{-q}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^t g^{-q}(x)\mathrm{d}x\int_0^t g^p(x)\left|f'(x)\right|^p\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

$$\mu(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & p\geq 2,\\[2ex] 1-\dfrac{1}{p}, & 1<p<2.\end{cases}$$

钟开莱不等式 设$B_i\,(i=1,2,\cdots,n)$为任意实数，$A_1\geq A_2\geq\cdots\geq A_n\geq 0$，且有 $\displaystyle\sum_{i=1}^k A_i\leq\sum_{i=1}^k B_i$，$k=1,2,\cdots,n$，则 $\displaystyle\sum_{i=1}^n A_i^2\leq\sum_{i=1}^n B_i^2$.

相应的钟开莱不等式的改进如下：

定理 6　设 $B_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意实数，$A_1 \geq A_2 \geq \cdots \geq A_n \geq 0$，且有 $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i \leq \sum\limits_{i=1}^{k} B_i$，$k=1,2,\cdots,n$，设 $1-e_i+e_j>0\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leq \sum_{i=1}^{n} |B_i|^p \left[1-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_1^p e_i \sum\limits_{j=1}^{n} |B_j|^p - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i^p \sum\limits_{j=1}^{n} |B_j|^p e_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^p \sum\limits_{j=1}^{n} |B_j|^p}\right)^2\right]^{\frac{\eta(p)}{2}},$$

其中 $\eta(p)=\begin{cases} p-1, & p\geq 2, \\ 1, & p<2. \end{cases}$

Ky Fan 不等式　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是三个实的 n 阶正定矩阵，$0\leq\lambda\leq 1$，则有

$$\frac{1}{|\lambda\boldsymbol{A}+(1-\lambda)\boldsymbol{B}|} \leq \frac{1}{|\boldsymbol{A}|^{\lambda}|\boldsymbol{B}|^{1-\lambda}}.$$

相应的 Ky Fan 不等式的改进如下：

定理 7（改进 1）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是三个实的 n 阶正定矩阵，$0\leq\lambda\leq 1$，则有

$$\frac{1}{|\lambda\boldsymbol{A}+(1-\lambda)\boldsymbol{B}|} \leq \frac{1}{|\boldsymbol{A}|^{\lambda}\,|\boldsymbol{B}|^{1-\lambda}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{|\boldsymbol{A}|}}{\sqrt{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}|}}-\frac{\sqrt{|\boldsymbol{B}|}}{\sqrt{|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|}}\right)^2\right]^{\min\{\lambda,1-\lambda\}}.$$

定理 8（改进 2）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是 4 个实的 n 阶正定矩阵，$0\leq\lambda\leq 1$，则有

$$\frac{1}{|\lambda\boldsymbol{A}+(1-\lambda)\boldsymbol{B}|} \leq \frac{1}{|\boldsymbol{A}|^{\lambda}\,|\boldsymbol{B}|^{1-\lambda}}\left(1-\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})\right)^{2\min\{\lambda,1-\lambda\}},$$

其中 $|\boldsymbol{C}|=\pi^n$，

$$\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})=\left[\frac{|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{4}}}{\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\right|^{\frac{1}{2}}}-\frac{|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{4}}}{\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\right|^{\frac{1}{2}}}\right]^2\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\sqrt{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|}}{\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\right|\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\right|}\right)^{\frac{k}{2}}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|}}{\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\right|\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\right|}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\sqrt{|\boldsymbol{A}|}}{\sqrt{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|}}-\frac{\sqrt{|\boldsymbol{B}|}}{\sqrt{|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}|}}\right)^2.$$

Opial-华罗庚不等式 设 $f(x)$ 为区间 $[0,h]$ 上的绝对连续函数，$f(0)=0$，并且 $p>0$，$q>1$，则有

$$\int_0^b |f|^p\,|f'|^q\,\mathrm{d}x\le\frac{qb^p}{p+q}\int_0^b |f'|^{p+q}\,\mathrm{d}x.$$

相应的 Opial-华罗庚不等式的改进如下:

定理 9 设 $f(x)$ 为区间 $[0,h]$ 上的绝对连续函数，$f(0)=0$，并且 $p,q>0$，$p+q>1$，设 $1-e(x)+e(y)\ge 0$，并且 $e(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi x}{t}$，$s=\min\{1,p+q-1\}$. 若 $0\le b_1<b$，则有

$$\int_{b_1}^b |f|^p\,|f'|^q\,\mathrm{d}x+\frac{p(q-1)}{p+q}\left(\int_{b_1}^b x^{-q}\,|f|^{p+q}\,\mathrm{d}x\right)+\frac{pqs}{2(p+q)}\pi(b_1,b)$$
$$\le\frac{q}{p+q}\left(b^p\int_0^b |f'|^{p+q}\,\mathrm{d}x-b_1^p\int_0^{b_1} |f'|^{p+q}\,\mathrm{d}x\right),$$

其中

$$\pi(b_1,b)=\int_{b_1}^b t^{p-1}\int_0^t |f'|^{p+q}\,\mathrm{d}x\left(\frac{1}{t}\int_0^t e(x)\mathrm{d}x-\frac{\int_0^t e(x)\,|f'|^{p+q}\,\mathrm{d}x}{\int_0^t |f'|^{p+q}\,\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}t.$$

Ingham 不等式 设 a_k,b_k,λ 为任意实数，记 $\|\boldsymbol{x}\|=\sum\limits_{k=0}^n |x_k|^2$，$S_{i,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{r,s=0}^n\dfrac{a_rb_s}{(r+s+\lambda)^i}$，则有

$$\left|S_{1,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2\le M^2(\lambda)\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|,$$

其中

$$M(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}, & 0\le\lambda\le\dfrac{1}{2},\\[2ex] 1, & \dfrac{1}{2}<\lambda\le 1.\end{cases}$$

相应的 Ingham 不等式的改进如下：

定理 10（改进 1）设 a_k, b_k, λ 为任意实数，记 $T_i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{l,m=0,\ l\neq m}^{n}\dfrac{a_1b_m}{(l-m)^i}$，$\|\boldsymbol{x}\|=\sum\limits_{k=0}^{n}|x_k|^2$，$S_{i,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{r,s=0}^{n}\dfrac{a_rb_s}{(r+s+\lambda)^i}$，则有

$$\begin{aligned}&\left|T_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2+\sin^2\lambda\pi\left|S_{1,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\cot\lambda\pi-\frac{1}{\pi}S_{2,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2\\&\quad\le\pi^2\Big\{\left[\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|-\pi^{-2}\sin^2\lambda\pi\,S_{1,\lambda}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})S_{1,\lambda}(\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{b}})\right]^2\\&\qquad-\frac{4}{\pi^4}\left(\tau_\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\tau_\lambda(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\right)^2\Big\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\tau_\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sin\lambda\pi\Big\{&\|\boldsymbol{b}\|\left[\frac{\pi}{3}S_{1,\lambda}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})+\cot\lambda\pi\,S_{2,\lambda}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})-\pi^{-2}S_{3,\lambda}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})\right]\\&-\pi^{-1}S_{1,\lambda}(\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{b}})T_2(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})\Big\}.\end{aligned}$$

定理 11（改进 2）设 a_k, b_k, λ 为任意实数，记 $T_i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{l,m=0,\ l\neq m}^{n}\dfrac{a_1b_m}{(l-m)^i}$，$\|\boldsymbol{x}\|=\sum\limits_{k=0}^{n}|x_k|^2$，$S_{i,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{r,s=0}^{n}\dfrac{a_rb_s}{(r+s+\lambda)^i}$，则有

$$\begin{aligned}&\left|S_{1,\lambda}(a,b)\right|^2+\left|\frac{T_1(a,b)}{\sin\lambda\pi}\right|^2+\left|S_{1,\lambda}(a,b)\cot\lambda\pi-\frac{1}{\pi}S_{2,\lambda}(a,b)\right|^2\\&\quad\le\frac{\pi^2}{\sin^2\lambda\pi}(\|a\|\,\|b\|).\end{aligned}$$

定理 12（改进 3）设 a_k, b_k, λ 为任意实数，记 $T_i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{l,m=0,\ l\neq m}^{n}\dfrac{a_1b_m}{(l-m)^i}$，$\|\boldsymbol{x}\|=\sum\limits_{k=0}^{n}|x_k|^2$，$S_{i,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{r,s=0}^{n}\dfrac{a_rb_s}{(r+s+\lambda)^i}$，则有

$$\left(|T_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2+|S_{1,1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\right)^2+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left(S_{2,1}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})\,||\boldsymbol{b}||+S_{2,1}(\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{b}})\,||\boldsymbol{a}||\right)^2$$
$$\leq \pi^4\left(||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||\right)^2.$$

定理13（改进 4）设 a_k,b_k,λ 为任意实数，记 $T_i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{l,m=0,\ l\neq m}^{n}\dfrac{a_1b_m}{(l-m)^i}$，$||\boldsymbol{x}||=\sum\limits_{k=0}^{n}|x_k|^2$，$||\overline{\boldsymbol{x}}||=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{|x_k|}{k+1}$，$S_{i,\lambda}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{r,s=0}^{n}\dfrac{a_rb_s}{(r+s+\lambda)^i}$，则有

$$\begin{aligned}&\left|S_{1,\frac{1}{2}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2+\left|T_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|^2\\&\quad\leq\pi^2\left\{\left[||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||-\frac{1}{\pi^4}S_{2,\frac{1}{2}}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})S_{2,\frac{1}{2}}(\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{b}})\right]^2\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{\pi^8}\left[||\bar{\boldsymbol{a}}||S_{2,\frac{1}{2}}(\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{b}})+||\bar{\boldsymbol{b}}||S_{2,\frac{1}{2}}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{a}})\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

定理14（Hilbert 积分不等式的改进）设 $f,g\geq 0$ 且 $f,g\in L^2(0,\infty)$，则当 $1-e(x)+e(y)\geq 0$ 时有

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^2\\&\quad\leq\pi^2\left[\left(\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_0^\infty f^2(x)\alpha(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]\\&\qquad\cdot\left[\left(\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_0^\infty g^2(x)\alpha(x)\mathrm{d}x\right)^2\right],\end{aligned}$$

其中 $\alpha(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{e(xt^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t-e(x)$.

Hardy 型不等式 设 $f(x)\in L^p(0,\infty)$，$p>1$ 及 $f(x)\geq 0$，则有

$$\int_0^\infty\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x.$$

相应的 Hardy 型不等式的改进如下：

定理 15（改进 1）设

(1) $0<\lambda\le 1,\ p,q>1,\ \lambda=2-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$;

(2) $f(x),g(x)\ge 0,\ x\in(0,\infty),\ F(y)\ge 0,\ y\ge 0$, 以及对每一正数 h, $\int_0^h g(x)\mathrm{d}x$ 存在;

(3) 设函数 $e(x)$ 定义在 $[0,\infty)$ 上, 并且 $1-e(x)+e(y)\ge 0$.

令 $q'=\dfrac{q}{q-1}$ 及

$$G_1(x)=\frac{g^{\frac{1}{q'}}(x)\int_0^x g(t)\left(\int_0^t g(v)\mathrm{d}v\right)^{-\alpha\lambda}F^{\frac{1}{p}}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^{(1-\alpha)\lambda}},$$

$$G_2(x)=\frac{g^{\frac{1}{\lambda q'}}(x)\int_0^x g(t)\left(\int_0^t g(v)\mathrm{d}v\right)^{-\alpha}F^{\frac{1}{\lambda p'}}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^{1-\alpha}},$$

$H_1=\Big(g(x)F\big(f(x)\big)\Big)^{\frac{1}{\lambda q'}}$. 若 $\alpha<1-\dfrac{1}{\lambda q'}$ 和 $H_1\in L^{\lambda q'}(0,\infty)$, 则

$$\int_0^\infty G_1^{q'}(x)\mathrm{d}x\le\left(\frac{q'\lambda}{q'\lambda(1-\alpha)-1}\right)^{q'\lambda}\left(\int_0^\infty g(x)F\big(f(x)\big)\mathrm{d}x\right)^{q'(1-\lambda)+1}\cdot\big(1-R^2(G_2,H_1)\big)^{\theta(q'\lambda)},$$

其中, $\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x>2,\\ \dfrac{1}{2}(x-1), & 1<x\le 2,\end{cases}$

$$R(G_2,H_1)=\frac{\int_0^\infty G_2^{q'\lambda}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty G_2^{q'\lambda}(x)\mathrm{d}x}-\frac{\int_0^\infty H_1^{q'\lambda}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty H_1^{q'\lambda}(x)\mathrm{d}x}.$$

定理 16（改进 2） 设

(1) $p>1,\ r>1$;

(2) $f(x), g(x) \geq 0$, $x \in (0,\infty)$, $F(y) \geq 0$, $y \geq 0$ 及对每一正数 h, $\int_0^h g(x)\mathrm{d}x$ 存在;

(3) 设函数 $e(x)$ 定义在 $[0,\infty)$ 上, 并且 $1-e(x)+e(y) \geq 0$. 令

$$G_3(x) = \frac{g^{\frac{1}{p}}(x)\int_0^x g(t)F^{\frac{1}{p}}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{r}{p}}},$$

$$H_2(x) = g^{\frac{1}{p}}(x)\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-r}{p}} F^{\frac{1}{p}}\big(f(x)\big).$$

若 $H_2 \in L^p(0,\infty)$, 则

$$\int_0^\infty G_3^p(x)\mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty H_2^p(x)\mathrm{d}x\big(1-R^2(G_3,H_2)\big)^{\theta(p)},$$

其中, $\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x > 2, \\ \dfrac{1}{2}(x-1), & 1 < x \leq 2, \end{cases}$

$$R(G_2,H_1) = \frac{\int_0^\infty G_2^{q'\lambda}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty G_2^{q'\lambda}(x)\mathrm{d}x} - \frac{\int_0^\infty H_1^{q'\lambda}(x)e(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty H_1^{q'\lambda}(x)\mathrm{d}x}.$$

Hardy-Littlewood-Polya 不等式 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f,g \geq 0$, $f \in L^p(0,\infty)$, $g \in L^p(0,\infty)$. 又设 $K(x,y)\ (\geq 0)$ 为齐负一次式, 并且设

$$\int_0^\infty K(x,1)x^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty K(1,y)y^{-\frac{1}{q}}\mathrm{d}y = k.$$

则有

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right)^p \mathrm{d}y \leq k^p \int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\leq k\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}.$$

相应的 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的改进如下：

定理 17（改进 1） 设 $p>1$, $0<\lambda\leq 1$ 及 $f(x)\,(\geq 0)\in L^p(0,\infty)$. 又设 $K(x,y)\geq 0$ 及 $\left(K(x,y)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ 为齐负一次式. 若有 $q>1$ 使 $\lambda=2-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$ 及

$$\int_0^\infty \left(K(x,1)x^{-\frac{1}{q'}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\mathrm{d}x=k,\quad q'=\frac{q}{q-1},$$

则

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right)^{q'}\mathrm{d}y\leq k^{\lambda q'}\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{(1-\lambda)q'+1}.$$

定理 18（改进 2） 设 $p>1$, $0<\lambda\leq 1$ 及 $f(x),g(x)\,(\geq 0)\in L^p(0,\infty)$, $1+e(x)-e(y)\geq 0$ 对 $x,y\in(0,\infty)$ 成立. 设 $K(x,y)\geq 0$ 及 $\left(K(x,y)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ 为齐负一次式. 又设 $q>1$ 使 $\lambda=2-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$ 且

$$\int_0^\infty \left(K(x,1)x^{-\frac{1}{q'}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\mathrm{d}x=k,\quad q'=\frac{q}{q-1},$$

则有

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\leq k^\lambda\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\left(1-R^2(f,g)\right)^{\frac{1}{2}\rho(q)},$$

其中 $\rho(q)=\min\left\{\dfrac{1}{q},\dfrac{1}{q'}\right\}$,

$$kE(x)=\int_0^\infty e\left(\frac{\omega}{x}\right)\left(K(\omega,1)\omega^{-\frac{1}{q'}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\mathrm{d}\omega,$$

$$R(f,g)=\frac{\int_0^{\infty}g^q(y)e(y)\mathrm{d}y}{\int_0^{\infty}g^q(y)\mathrm{d}y}-\frac{\int_0^{\infty}f^p(x)E(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x}.$$

定理19（改进3）设 $c>0$, $p>1$, $0<\lambda\le 1$ 及 $f(x),g(x)\,(\ge 0)\in L^p(0,\infty)$, $1+e(x)-e(y)\ge 0$ 对 $x,y\in(0,\infty)$ 成立. 设 $K(x,y)=(x^c+y^c)^{-\frac{\lambda}{c}}$, $q>1$ 使 $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ 且 $q'=\frac{q}{q-1}$, 则有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{(x^c+y^c)^{\frac{\lambda}{c}}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\le c^{-\lambda}B^{\lambda}\left(\frac{1}{c\lambda p'},\frac{1}{c\lambda q'}\right)||f||_p\,||g||_q\left(1-R^2(f,g)\right)^{\frac{1}{2}m(q)},\end{aligned}$$

其中 $m(q)=\min\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{q'}\right\}$, $B(a,b)$ 为 Beta 函数,

$$R(f,g)=\frac{(g^q,e)}{||g||_q^q}-\frac{(f^p,E)}{||f||_p^p},$$

$$c^{-1}B\left(\frac{1}{c\lambda p'},\frac{1}{c\lambda q'}\right)E(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{(\omega^c+1)^{\frac{1}{c}}}\omega^{-\frac{1}{\lambda q'}}e\left(\frac{x}{\omega}\right)\mathrm{d}\omega.$$

定理20（改进4）同定理19所设, 但$p=q$, $e(x)=\frac{1}{2}\cos\sqrt{x}$, $E(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$, 则

$$\begin{aligned}I(f)&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+y)^{\lambda}}f(x)f(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\le\pi^{\lambda}||f||_p^2\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\int_0^{\infty}f^q(x)\left(\cos\sqrt{x}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x}{||f||_p^p}\right)^2\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

定理21（改进5） 设 $1+e(x)-e(y)\ge 0$ 对 $x,y\in(0,\infty)$ 成立, $\lambda>0$, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f,g\ge 0$. 又设 $K(x,y)\ge 0$, $\left|K(x,y)\right|^{\frac{1}{\lambda}}$ 为齐负一

次式. 若记

$$F_\lambda(x)=x^{\frac{1-\lambda}{q}}f(x)\in L^p(0,\infty),\quad G_\lambda(y)=y^{\frac{1-\lambda}{p}}g(y)\in L^p(0,\infty),$$

$$R(F_\lambda,G_\lambda)=\frac{(G_\lambda^q,e)}{||G_\lambda||_q^q}-\frac{(F_\lambda^p,E)}{||F_\lambda||_p^p},\quad \int_0^\infty K(\omega,1)\omega^{\frac{\lambda}{q}-1}\mathrm{d}\omega=k,$$

$$\rho(p)=\min\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right\},\quad kE(x)=\int_0^\infty K(\omega,1)e\left(\frac{x}{\omega}\right)\omega^{\frac{\lambda}{q-1}}\mathrm{d}\omega.$$

则有

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1}\left(\int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\le k\int_0^\infty x^{(p-1)(1-\lambda)}f^p(x)\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\le k\,||F_\lambda||_p\,||G_\lambda||_q\left(1-R^2(F_\lambda,G_\lambda)\right)^{\frac{\rho(p)}{2}}.$$

定理 22（改进 6） 设 $1+e(x)-e(y)\ge 0$ 对 $x,y\in(0,\infty)$ 成立，$\lambda>0$，$p,q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f,g\ge 0$. 又设 $K(x,y)=\frac{1}{(x^c+y^c)^{\frac{\lambda}{c}}}$，$c>0$. 若记

$$F_\lambda(x)=x^{\frac{1-\lambda}{q}}f(x)\in L^p(0,\infty),\quad G_\lambda(y)=y^{\frac{1-\lambda}{p}}g(y)\in L^p(0,\infty),$$

$$R(F_\lambda,G_\lambda)=\frac{(G_\lambda^q,e)}{||G_\lambda||_q^q}-\frac{(F_\lambda^p,E)}{||F_\lambda||_p^p},\quad \int_0^\infty K(\omega,1)\omega^{\frac{\lambda}{q}-1}\mathrm{d}\omega=k,$$

$$\rho(p)=\min\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right\},\quad kE(x)=\int_0^\infty K(\omega,1)e\left(\frac{x}{\omega}\right)\omega^{\frac{\lambda}{q-1}}\mathrm{d}\omega.$$

则有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\le\frac{1}{c}B\left(\frac{\lambda}{cp},\frac{\lambda}{cq}\right)||F_\lambda||_p\,||G_\lambda||_q\left(1-R^2\left(F_\lambda,G_\lambda\right)\right)^{\frac{\rho(p)}{2}}.$$

定理 23（改进 7） 如定理 22 所设，取 $p=2$，记

$$I(f,g)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

则有

$$I(f,g) \le \frac{\pi}{\lambda} ||F_\lambda||_2 \, ||G_\lambda||_2 \left(1 - R_i^2(F_\lambda, G_\lambda)\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$\cdot \left(1 - R_i^2(G_\lambda, G_\lambda)\right)^{\frac{1}{4}}, \quad i = 1, 2,$$

其中

$$R_i(h,h) = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty h^2(y)\left(\cos\sqrt{y^\lambda} - \mathrm{e}^{-\sqrt{y^\lambda}}\right)\mathrm{d}y}{||h||_2^2}, \quad h = F_\lambda, G_\lambda.$$

定理 24（改进 8） 设 $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\lambda > 0$, $f(x) \ge 0$, $g(y) \ge 0$ 及 $x^{\frac{1-\lambda}{p}} f(x) \in L^p(0,\infty)$, $y^{\frac{1-\lambda}{q}} g(y) \in L^p(0,\infty)$, 并且对任意的 $x, y \in (0,\infty)$, 都有 $1 + e(x) - e(y) \ge 0$. 又设 $K(x,y) \ge 0$, $K^{\frac{1}{\lambda}}(x,y)$ 为关于 x, y 的齐负一次式. 若记

$$\int_0^\infty K(x,1) x^{\frac{\lambda-2}{p}} \mathrm{d}x = k,$$

$$R(f,g) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty y^{1-\lambda} e(y) g^p(y)\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_0^\infty y^{1-\lambda} g^p(y)\mathrm{d}y} - \frac{\displaystyle\int_0^\infty x^{1-\lambda} f^p(x) E(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^\infty x^{1-\lambda} f^p(x)\mathrm{d}x},$$

$$kE(x) = \int_0^\infty e\left(\frac{x}{\omega}\right) K(\omega,1)\omega^{\frac{\lambda-2}{p}} \mathrm{d}\omega, \quad \theta(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{2p}, & p \ge q, \\[2mm] \dfrac{1}{2q}, & q > p, \end{cases}$$

则有

$$\int_0^\infty y^{\frac{(\lambda-1)p}{q}} \left(\int_0^\infty K(x,y) f(x)\mathrm{d}x\right)^p \mathrm{d}y \le k^p \int_0^\infty x^{1-\lambda} f^p(x)\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x,y) f(x) g(y) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\le k \left(\int_0^\infty x^{1-\lambda} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty y^{1-\lambda} g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 - R^2(f,g)\right)^{\theta(p)}.$$

定理 25（改进 9） 设 $1-\alpha\lambda+\lambda p+\dfrac{\lambda-2}{p}>0$, $f\ge 0$, $x^{\frac{1-\lambda}{p}}f\in L^p(0,\infty)$, 则有

$$\int_0^\infty y^{\frac{(\lambda-1)p}{q}}\left(\int_0^y \frac{y^{(\alpha-1)\lambda}}{x^{\alpha\lambda}}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y \le \frac{p^p}{[p-\lambda(\alpha-1)p+\lambda-2]^p}\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x.$$

定理 26（改进 10） 设 $\lambda-2+\min\{p,q\}>0$, $f(x)\ge 0$, $x^{\frac{1-\lambda}{p}}f\in L^p(0,\infty)$, 则有

$$\int_0^\infty y^{\frac{(\lambda-1)p}{q}}\left[\int_0^\infty f(x)(x+y)^{-\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y \le B^p\left(1+\frac{\lambda-2}{p},1+\frac{\lambda-2}{p}\right)\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x.$$

参考文献

[1] 胡克. 一个不等式及其若干应用. 中国科学, 1981, 2: 141-148.

[2] 胡克. 论 Nagy-Carlson 型不等式. 江西师范大学学报, 1993, 17 (2): 89-91.

[3] 胡克. 关于 Beekenbach 不等式. 江西师范大学学报, 1994, 18 (2): 140-141.

[4] 胡克. 论 Hölder 不等式. 江西师范大学学报, 1994, 18 (3): 205-207.

[5] 胡克. 关于 Hardy-Littlewood-Polya 不等式及其应用. 数学年刊, 1994, 15 (5): 524-527.

[6] 胡克. 论 Opial-Beesack 不等式. 江西师范大学学报, 1995, 19 (1): 23-26.

[7] 胡克. 关于 Minkowski 不等式. 江西师范大学学报, 1995, 19 (4): 285-287.

[8] 胡克. 伪平均不等式的改进与推广. 抚州师专学报, 1996, 1 (1): 1-3.

[9] 胡克. 论 Opial-华罗庚型积分不等式. 数学年刊, 1996, 17 (5): 517-518.

[10] 胡克. 论一个不等式及其若干应用. 数学物理学报, 1998, 18 (2): 192-199.

[11] 胡克. 单叶函数的若干问题. 武汉: 武汉大学出版社, 2001.

[12] 胡克. 一个新的不等式及若干应用. 数学理论与应用, 2002, 22 (2): 1-6.

[13] 胡克. 解析不等式的若干问题. 武汉: 武汉大学出版社, 2003.

[14] 胡克. 关于 Aczél-Popoviciu-Vasic 不等式. 江西师范大学学报,

2006, 30 (2): 158-160.

[15] 匡继昌. 常用不等式(第四版). 济南: 山东科学技术出版社, 2010.

[16] Aczél J. Some general methods in the theory of functional equations in one variable. New applications of functional equations, Uspehi. Mat. Nauk (N. S.) (in Russian), 1956, 11: 3-68.

[17] Beckenbach E F, A class of mean-value functions. The American Mathematical Monthly, 1950, 57: 1-6.

[18] Beckenbach E F. On Hölder's inequality. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1966, 15: 21-29.

[19] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities. Berlin: Springer, 1983.

[20] Hölder O. Über einen mittelwertsatz. Göttinger Nachrichten, 1889, 2: 38-47.

[21] Rogers L J. An extension of a certain theorem in inequalities. Messenger of Math., 1888, 17: 145-150.

[22] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[23] Hao Z-C. Note on the inequality of the arithmetic and geometric means. Pacific J. Math., 1990, 143: 43-46.

[24] Hu K. On an inequality and its applications. Scientia Sinica, 1981, 24 (8): 1047-1055.

[25] Hu K. On Hilbert's inequality. Chinese Annals of Mathematics, 1992, 13 (1): 35-39.

[26] Hu K. On Hilbert type inequality and its application. Journal of Jiangxi Normal University, 2001, 25 (2): 115-120.

[27] Hu K. On Polya-Szegö inequalities. Analysis in theory and applications, 2005, 21 (4): 395-398.

[28] Hu K. On an inequality and its applications. Journal of Jiangxi Normal University, 1994, 18 (4): 330-333.

[29] Mitrinović D S, Pečarić J E, Fink A M. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer, Dordrecht, 1993.

[30] Mitrinović D S, Vasić P M. Analytic Inequalities. New York: Springer, 1970.

[31] Popoviciu T. On an inequality. Gaz. Mat. Fiz. Ser. A (in Romanian), 1959, 11: 451-461.

[32] Tian J-F. Extension of Hu Ke's inequality and its applications. Journal of Inequalities and Applications, 2011, vol. 2011, article 77.

[33] Tian J. Reversed version of a generalized sharp Hölder's inequality and its applications. Information Sciences, 2012, 201: 61-69.

[34] Tian J-F. Reversed version of a generalized Aczel's inequality and its application. Journal of Inequalities and Applications, 2012, Vol. 2012, article 202.

[35] Tian J-F. Property of a Hölder-type inequality and its application. Mathematical Inequalities & Applications, 2013, 16 (3): 831-841.

[36] Tian J, Hu X-M. A new reversed version of a generalized sharp Hölder's inequality and its applications. Abstract and Applied Analysis, 2013, vol. 2013, Article ID 901824, 9 pages.

[37] Tian J, Zhou Y-X. Refinements of Hardy-type inequalities, Abstract and Applied Analysis. 2013, vol. 2013, Article ID 727923, 7 pages.

[38] Vasić P M, Pečarić J E. On Hölder and some related inequalities. Mathematica Rev. D'Anal. Num. Th. L'Approx., 1982, 25: 95-103.

[39] Wang C-L. Characteristics of nonlinear positive functional and their applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983, 95: 564-574.

[40] Wu S, Debnath L. Generalizations of Aczél's inequality and Popoviciu's inequality, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2005, 36 (2): 49-62.

[41] Wu S. Generalization of a sharp Hölder's inequality and its application. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 332 (1): 741-750.

[42] Wu S. A new sharpened and generalized version of Hölder's inequality and its applications. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197 (2): 708-714.

[General Information]
书名=胡克不等式及其应用
作者=田景峰著
页数=108
SS号=13465555
DX号=
出版日期=2013.10
出版社=武汉大学出版社